L'apport de Leibniz pour la quadrature du cercle

Bernard Aymon

Trop investi dans la politique allemande pour avoir le loisir d'écrire de longs traités de mathématique, Leibniz publie son calcul différentiel de manière fragmentaire. C'est dans une série d'articles brefs, parus à partir de 1682 dans les "Acta eruditorum", journal scientifique fondé à Leipzig avec son soutien, que l'on trouve l'essentiel de ses travaux mathématiques. Nombre de ses résultats n'ont jamais été publiés et se trouvent consignés dans un journal. Leibniz y notait ses découvertes au fur et à mesure qu'il les faisait. Ces notes étant incomplètes et confuses, il est parfois difficile de suivre l'évolution de ses idées sur le calcul différentiel et intégral.

Leibniz a ouvertement reconnu que c'est seulement pendant son séjour à Paris, des années 1672 à 1676, qu'il a commencé à étudier les mathématiques supérieures, encouragé et instruit qu'il fut par Christiaan Huygens. Dans son ouvrage "De quadratura arithmetica Ciculi Ellipseos et Hyperbolae", il établit le premier résultat de ces études. Il y réussit à exprimer l'aire du quart de disque de rayon égal à 1 comme égale à la somme infinie $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots$ Cette somme porte encore aujourd'hui son nom, comme Huygens, à qui Leibniz communiqua en premier sa découverte, le lui avait tout de suite prédit. Il faut cependant préciser que cette formule pour calculer π a aussi été trouvée par James Gregory (1638-1675) vers la fin de sa vie et même antérieurement par le mathématicien indien Madhara vers 1410. Bien des années après la parution de cet ouvrage, Leibniz prétendra avoir tiré sa première inspiration de la lecture d'un passage du "Traité des sinus du quart du cercle" de Blaise Pascal.

L'établissement de cette formule est le sujet de cet article. Commençons par donner des extraits d'une lettre écrite en français que Leibniz a probablement adressée à l'éditeur du "Journal des Sçavans":

"Monsieur,

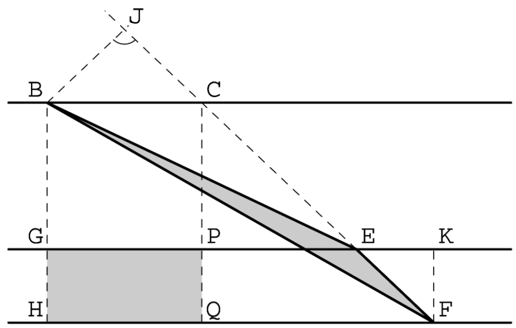
La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres il y a déjà quelques années, leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public. Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées pour donner une seule qui soit nouvelle et considerable, j'ay recours à Vostre Journal qui nous donne le moyen de publier un theoreme sans faire un livre."

Plus loin, il y propose sa somme infinie : $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\dots$ en précisant ce qui suit : "L'usage de cette quadrature est qu'outre la beauté d'un theoreme aussi simple et aussi surprenant que celuy-ci nous avons un moyen de trouver les angles par les costez et à rebours; item les espaces ou portions des Cercles, Ellipses, Cones, Spheres, Spheroides et de leurs surfaces, le tout par une simple addition de nombres rationaux ou grandeurs commensurables au defaut même de tables toutes calculées, et sans polygones, dont le calcul demande une extraction perpetuelle de racines, outre qu'ainsi on approchera bien viste; car si b par exemple estoit $\frac{1}{10}$, b^{11} seroit $\frac{1}{100000000000}$ et par consequent toutes les puissances plus hautes pourront négligées hardiment." Quel bel exemple de l'amour inconsidéré des allemands à faire de longues phrases !

Un dernier extrait nous explique "les origines de son invention" : "J'ay donc consideré, que les quadratures que nous avons trouvées jusqu'icy par l'analyse ordinaire, dependent des regles Arithmetiques de trouver les sommes des rangs reglés, ou des progressions de nombres rationaux. Mais les ordonnées du cercle estant irrationelles, j'ay taché de transformer le cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle rationelles, c'est à dire dont les ordonnées sont commensurables à leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quantité de Metamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison tres aisée (car je pourrois par ce moyen écrire en une heure de temps une liste de plus de 50 figures planes ou solides, differentes, et neantmoins dependantes de la circulaire) j'ay trouvé bientost le moyen que je m'en vays expliquer."

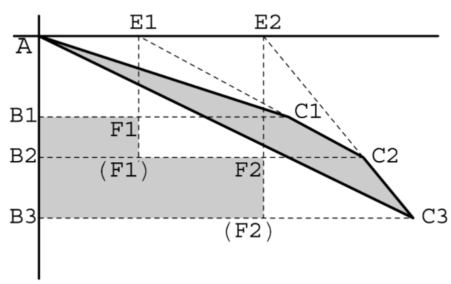
Suivons donc le raisonnement de Leibniz en s'appuyant sur des résultats qui se trouvent dans plusieurs de ses articles ou lettres.

Commençons par un lemme (fig. 1) : "Trois paralleles BC, GE, HF passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance de deux autres paralleles GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera double du Triangle BEF."



De l'angle fixé en B on trace une perpendiculaire (BJ) au côté opposé (EF). On obtient ainsi deux triangles semblables BJC et EFK. On a donc : $\sigma(BEF) = \frac{1}{2}EF{\cdot}BJ$ et comme $\frac{EF}{KF} = \frac{BC}{BJ}$, on conclut que $\sigma(BEF) = \frac{1}{2}BC \cdot KF = \frac{1}{2}PG \cdot GH$.

Passons maintenant à la situation représentée par la figure 2 :



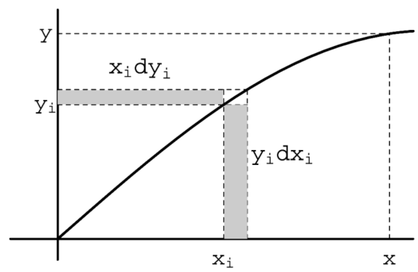
L'aire de la "zone" en escaliers $B_1B_3(F_2)F_2(F_1)$ F_1B_1 est égale au double du "segment" $C_1AC_3C_2C_1$. On utilise deux fois le lemme précédent pour montrer ce résultat. Les segments $[AE_i]$ ou $[B_iF_i]$ sont appelés les "interceptées".

Venons-en à son résultat essentiel qu'il nomme "sa Characteristica". Il reprend le dessin précédent, mais il considère le cas où le point C_1 est confondu avec le point A. De plus, il apporte la précision suivante : que soient pris autant de points que l'on voudra sur la courbe proposée (d'équation $y = f(x)$), soit $C_1C_2C_3C_4$..., et en même nombre les correspondants $F_1F_2F_3F_4$..., les (CE) étant les "touchantes" (tangentes) à la courbe proposée. Il montre alors (fig. 3) que l'aire de la "zone" délimitée par l'axe (AB_i), la verticale $x = B_i$ et la courbe des "interceptées" est égale au double du segment curviligne de "base" $[AC_i]$ et délimité par la courbe donnée.

Voici comment Leibniz procède sans indiquer les indices des points concernés (fig. 4).

Posons $AB = EF = x$, $BC = y$, $AE = BF = z$ et $FC = y - z$. De même, sous la "touchante" EC, considérons les éléments différentiels dx et dy. On a alors : $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y-z}$ ou $ydx - zdx = xdy$, ou encore $2ydx - zdx = xdy + ydx$ (1).

Or $\int xdy + \int ydx = \int(xdy + ydx) = xy$ (2). Le résultat est immédiat en considérant, sur la figure 5, les sommes $\sum_i x_idy_i + \sum_i y_idx_i = \sum_i(x_idy_i + y_idx_i) \approx xy$.



De (1) et (2) on obtient : $2\int ydx - \int zdx = xy$ ou encore $\int ydx - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\int zdx$ (3).

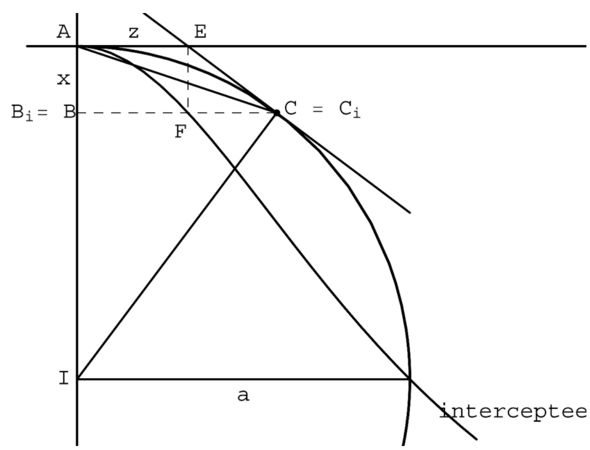
Or $\frac{1}{2}\int zdx$ n'est rien d'autre que la moitié de l'aire de la "zone" formée par les "interceptées", $\frac{1}{2}xy$ l'aire du triangle AB_iC_i et $\int ydx$ l'aire de la "zone" délimitée par la courbe. De l'égalité (3), on obtient bien que l'aire du segment curviligne est égale à la moitié de l'aire de la "zone" délimitée par la courbe des "interceptées".

Il ne reste plus qu'à utiliser ce résultat pour le quart de disque.

L'équation du demi-cercle de rayon $a = AI$ est donnée par $y = \sqrt{2ax - x^2}$. Les méthodes habituelles du calcul des tangentes permettent à Leibniz de déduire l'expression de l'abscisse x en fonction de "l'interceptée" z :

$$x = \frac{2az^2}{a^2 + z^2}.$$

Voici comment.



Posons $x_1 = x$ l'abcisse du point C situé sur le cercle et $z_1 = AE$ la valeur de l'interceptée pour $x_1 = x$.

De $y^2 = a^2 - (x-a)^2$ on trouve $2yy' = -2(x-a)$ et $y' = -\frac{x-a}{y}$.

L'équation de la tangente au cercle en C est donc : $y = -\frac{x_1 - a}{y_1}x + k$ où k est égal à z_1. On en déduit $z_1 = y_1 + \frac{(x_1-a)x_1}{y_1} = \frac{2ax_1 - x_1^2 + x_1^2 - ax_1}{y_1}$, c'est-à-dire $z_1 = \frac{ax_1}{y_1}$. On trouve, dans le cas général : $z = \frac{ax}{y}$ (4).

Utilisons l'égalité $z_1 = AE = \frac{ax_1}{\sqrt{a^2 - (x_1-a)^2}}$ pour exprimer x_1 en fonction de z_1 seulement. Leibniz propose cette égalité pour x_1, y_1 et z_1 quelconques :

$$\frac{AE^2}{IE^2} = \frac{AE^2}{AE^2 + a^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{AE^2}} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{z^2}}.$$

De $z^2 = \frac{a^2x^2}{a^2-(x-a)^2}$, on obtient $\frac{AE^2}{IE^2} = \frac{x}{2a}$. En posant dans cette égalité $AE = z$ et $IE = \sqrt{a^2 + z^2}$, on peut écrire l'égalité cherchée : $\frac{z^2}{a^2+z^2} = \frac{x}{2a}$ (5).

Revenons à "sa Characteristica" appliquée au cercle. Pour un point $C(x; y)$ quelconque du quart de cercle, l'aire du secteur circulaire ICA est égale à l'aire du triangle ICA additionnée à l'aire du segment circulaire AC.

Or cette dernière aire est égale à la moitié de l'aire donnée par la courbe des "interceptées". L'aire du secteur circulaire est donc égal à $\frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}\int_0^x zdx$. Or $\int_0^x zdx = xz + \int_0^z xdz$. Calculons d'abord ay. De $z = \frac{ax}{y} = \frac{axy}{y^2}$, on obtient aussi $zy^2 = axy$, c'est-à-dire $z(2ax - x^2) = axy$ et finalement $ay = z(2a - x)$.

Ainsi l'aire du secteur circulaire est égal à $\frac{1}{2}(z(2a-x)) + \frac{1}{2}(xz - \int_0^z xdz) = az - \int_0^z \frac{az^2}{a^2+z^2}dz$.

Pour calculer cette intégrale, Leibniz fait appel à la "belle méthode" mise au point par Mercator (Nikolaus Kauffmann) :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \ldots$$

En posant $a = 1$ et $z = b$, il faut calculer $\int_0^b \frac{z^2}{1+z^2}dz = \int_0^b z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots)dz$.

Or Leibniz connaît bien les quadratures des courbes polynomiales d'équation $y = ax^n$ pour lesquelles $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, expression qu'il écrit : "$\int x^n dx = \frac{diff(x)^{n+1}, x^{n+1}}{n+1}$". Il obtient donc : $\int_0^b \frac{z^2}{1+z^2}dz = \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} + \ldots$ et finalement son résultat essentiel pour l'aire du secteur circulaire qui est égale à $b - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \ldots$

Pour obtenir le quart du disque, on pose $b = 1$. Ainsi Leibniz trouve sa formule :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Il écrit : "J'avoue que cette démonstration ne pourra pas estre entendue de tout le monde parce qu'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux qui sont versez dans les nouvelles decouvertes et qui sçavent manier les characteres ou symboles. ... S'il y a lieu d'esperer qu'on pourra jamais arriver à une raison analytique, exprimée en termes finis, du Diametre à la circonference, je croy que ce sera par cette voye, car quoyque les expressions soyent infinies, nous ne laissons pas quelques fois d'en trouver les sommes."

Que dit-il de la limite de cette somme ? Dans un article intitulé "De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa.", paru dans les "Acta eruditorum Lipsiensium" en 1682, on y lit : "La série entière contient toutes les approximations en même temps ou les valeurs plus grandes et plus petites de la vraie valeur. Il faudra la continuer aussi loin que possible pour que l'erreur soit plus petite qu'une fraction donnée, et, par suite, que n'importe quelle quantité donnée. C'est pourquoi toute la série exprime la valeur exacte." Plus loin, il continue ainsi : "Si quelque cercle n'est pas commensurable par un carré, il ne peut être exprimé par un nombre, mais devra nécessairement être exhibé par une série de rationnels, et de même pour la diagonale d'un carré , et la section extrême et moyenne faite dans un rapport, que certains appellent divine, et beaucoup d'autres quantités qui sont irrationnelles."