ILL Document Delivery

REG-12515233

OHUEKL

NLM -- W1 CR235

UNIVERSITY OF CINCINNATI
LANGSAM LIBRARY ILL
INTERLIBRARY LOAN DEPARTMENT ROOM 480
CINCINNATI, OH 45221-0033

ATTN:
PHONE:513-475-2218
FAX:
E-MAIL

SUBMITTED:2002-10-22 14:47:2
PRINTED: 2002-10-23 13:12:4
REQUEST NOREG-12515233
SENT VIA: DOCLINE
KYB-8522612

REG	Copy	Journal

TITLE: CRONICA CIENTIFICA; REVUE INTERNACIONAL DE CIENCIAS
PUBLICATION PLACE: Barcelona.
VOLUME/ISSUE/PAGES:1880;3(n/a):425-429 425-429
DATE: 1880
AUTHOR OF ARTICLE: Ricart, L.Clariana y
TITLE OF ARTICLE: Application de las determinates a la resolucion...
OTHER NOS/LETTERS: Unique ID: 0006234
SOURCE: LOCATORplus
MAX COST: $20.00
COPYRIGHT COMP.: Guidelines
CALL NUMBER: W1 CR235
NOTES: LAP

Prof. Roger Chalkley
556-4074

REQUESTER INFO: Chalkley, R.
DELIVERY: Mail:
REPLY: Mail:

KEEP THIS RECEIPT TO RECONCILE WITH NTIS INVOICE.

For problems or questions, contact NLM at http://wwwcf.nlm.nih.gov/ill/ill_web_form.cfm or by phone 301-496-5511.

Include LIBID and request number.

NOTE: THIS MATERIAL MAY BE PROTECTED BY COPYRIGHT LAW (TITLE 17, U.S. CODE)

NLM Collection Access Section, Bethesda, MD

APLICACION DE LAS DETERMINANTES Á LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE CUARTO GRADO

POR D. LAURO CLARIANA Y RICART.
Catedrático en el Instituto de Tarragona.

El matemático Dostor resuelve las ecuaciones de tercer grado, valiéndose de una determinante circular compuesta de tres líneas; nosotros vamos á resolver las de cuarto grado, apoyándonos en el principio fundamental siguiente:

Cuando una determinante del órden enésimo tiene n permutaciones circulares en líneas ó columnas, esta determinante es el producto de n factores de primer grado con relacion á estas cantidades. Dichos factores son las sumas de los productos que se obtienen, multiplicando estas cantidades por las n potencias sucesivas de cada una de las n raíces enésimas de la unidad.

Bajo este supuesto, para resolver la ecuacion de cuarto grado, supondremos la determinante siguiente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix},$$

la cual podremos expresar, segun el principio anterior, por

$$(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3)(a+b\beta+c\beta^2+d\beta^3)(a+b\gamma+c\gamma^2+d\gamma^3)(a+b\delta+c\delta^2+d\delta^3),$$

siendo α, β, γ, δ, las cuatro raíces de la unidad correspondiente á la ecuacion $y^4=1$. Pero como estas raíces se pueden hallar fácilmente, para conocer los valores de cada uno de los cuatro factores anteriores, bastará determinar las cantidades a, b, c, d, y así tendremos las cuatro raíces de la ecuacion de cuarto grado correspondientes á la determinante Δ.

Desarrollando, pues, la determinante Δ, tendremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & d & a \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & d & a \\ c & a & b \\ d & b & c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c & a \\ c & d & b \\ d & a & c \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ d & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a^2c^2 - acb^2 - acd^2 + a^2bd + a^2db - a^4 - ab^2c + b^4 + bdc^2 - b^2d^2 - ab^2c + a^2bd$$
$$+ c^2bd - acb^2 - c^4 + c^2bd + a^2c^2 - acd^2 - d^2b^2 + a^2db + c^2bd - acd^2 - acd^2 + d^4$$
$$= a^4 - (2c^2+4bd)a^2 + 4c(b^2+d^2)a + c^4 - 4bdc^2 - (b^2-d^2)^2.$$

Este resultado nos dice que la determinante Δ, se puede considerar como una ecuacion de cuarto grado, en que a representa la incógnita.

Si hacemos, $a=-x$, resultará segun las consideraciones anteriores

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x & b & c & d \\ b & c & d & -x \\ c & d & -x & b \\ d & -x & b & c \end{vmatrix} = x^4 - (2c^2+4bd)x^2 - 4c(b^2+d^2)x + c^4 - 4bdc^2 - (b^2-d^2)^2$$

$$= (-x+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3)(-x+b\beta+c\beta^2+d\beta^3)(-x+b\gamma+c\gamma^2+d\gamma^3)(-x+b\delta+c\delta^2+d\delta^3).$$

Material may be protected by copyright law (Title 17, U.S. Code)

Si suponemos este resultado igual á cero, y lo comparamos con la ecuacion general de cuarto grado $x^4+4px^2+8qx+4r=0$, identificando los resultados tendremos:

$$-(2c^2+4bd)=4p \quad (1), \quad -4c(b^2+d^2)=8q \quad (2),$$
$$c^4-4bdc^2-(b^2-d^2)^2=4r \quad (3),$$

De la igualdad (2) se obtiene

$$b^2+d^2=-\frac{2q}{c}, \text{ luego } (b^2+d^2)^2=\frac{4q^2}{c^2}, \text{ ó sea, } b^4+2b^2d^2+d^4=\frac{4q^2}{c^2},$$

cuya igualdad puede trasformarse en

$$(b^2-d^2)^2=\frac{4q^2}{c^2}-4b^2d^2.$$

Sustituyendo este valor en (3), se tiene:

$$c^4-4bdc^2-\left(\frac{4q^2}{c^2}-4b^2d^2\right)=4r \quad (4).$$

Empero de (1) podemos deducir

$$4bd=-2c^2-4p, \text{ ó sea tambien } 4b^2d^2=4\left(\frac{c^2}{2}+p\right)^2.$$

Haciendo las sustituciones debidas en (4), definitivamente se obtiene:

$$4r=c^4+(4p+2c^2)\,c^2-\left[\frac{4q^2}{c^2}-4\left(\frac{c^2}{2}+p\right)^2\right]$$
$$=c^4+4pc^2+2c^4-\frac{4q^2}{c^2}+4\left(\frac{c^4}{4}+c^2p+p^2\right); \text{ luego,}$$

$c^6+4pc^4+2c^6-4q^2+c^6+4c^4p+4p^2c^2=4rc^2$, de donde $c^6+2pc^4+(p^2-r)c^2-q^2=0$, en cuya ecuacion si suponemos $c^2=z''$, resulta:

$$z''^3+2pz''^2+(p^2-r)\,z''-q^2=0.$$

Ecuacion que no és más que la *reducida* que se obtiene por el método de Cardan.

Una vez resuelta esta ecuacion de tercer grado, se obtiene el valor c, por medio de la igualdad siguiente: $c=\pm\sqrt{z''}$, considerando z'', como una de las tres raíces de la ecuacion de tercer grado, que acabamos de hallar. Ahora, si el desarrollo de la determinante Δ, lo hubiésemos ordenado respecto las letras b ó d, habríamos encontrado la misma ecuacion de tercer grado dependiente de d ó b, todo lo cual nos dice que las raíces de dicha ecuacion de tercer grado, expresan los valores de b^2 c^2 y d^2; de suerte que llamando z', z'' y z''', las raíces de la reducida, éstas vendrán expresadas respectivamente por

$$z'=b^2, \qquad z''=c^2 \qquad \text{y} \qquad z'''=d^2, \qquad \text{de donde}$$
$$b=\pm\sqrt{z'}, \qquad c=\pm\sqrt{z''}, \qquad \text{y} \qquad d=\pm\sqrt{z'''}.$$

Resumiendo, por fin, por medio de una série de igualdades los diferentes valores correspondientes á la determinante Δ, tendremos:

Material may be protected by copyright law (Title 17, U.S. Code)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & b & c & d \\ b & c & d & -x \\ c & d & -x & b \\ d & -x & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 - (2c^2 + 4bd)\, x^2 - 4c\,(b^2 + d^2)\, x + c^4 - 4bdc^2 - (b^2 - d^2)^2 =$$
$$= x^4 + 4xp^2 + 8qx + 4r =$$
$$= (-x + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3)(-x + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3)(-x + b\gamma + c\gamma^2 + d\gamma^3)(-x + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3) =$$
$$= (-x \pm \sqrt{z'}.\,\alpha \pm \sqrt{z''}.\,\alpha^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\alpha^3)(-x \pm \sqrt{z'}.\,\beta \pm \sqrt{z''}.\,\beta^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\beta^3)(-x \pm \sqrt{z'}.\,\gamma$$
$$\pm \sqrt{z''}.\,\gamma^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\gamma^3)(-x \pm \sqrt{z'}.\,\delta \pm \sqrt{z''}.\,\delta^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\delta^3) = 0.$$

Empero este producto de cuatro factores puede ser igual á cero, siéndolo cada uno de dichos factores, luego:

$$\left.\begin{aligned} -x \pm \sqrt{z'}.\,\alpha \pm \sqrt{z''}.\,\alpha^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\alpha^3 = 0. \\ -x \pm \sqrt{z'}.\,\beta \pm \sqrt{z''}.\,\beta^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\beta^3 = 0. \\ -x \pm \sqrt{z'}.\,\gamma \pm \sqrt{z''}.\,\gamma^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\gamma^3 = 0. \\ -x \pm \sqrt{z'}.\,\delta \pm \sqrt{z''}.\,\delta^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\delta^3 = 0. \end{aligned}\right\} \text{de donde:}$$

$$\left.\begin{aligned} x = \pm \sqrt{z'}.\,\alpha \pm \sqrt{z''}.\,\alpha^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\alpha^3 \\ x = \pm \sqrt{z'}.\,\beta \pm \sqrt{z''}.\,\beta^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\beta^3 \\ x = \pm \sqrt{z'}.\,\gamma \pm \sqrt{z''}.\,\gamma^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\gamma^3 \\ x = \pm \sqrt{z'}.\,\delta \pm \sqrt{z''}.\,\delta^2 \pm \sqrt{z'''}.\,\delta^3 \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Estos cuatro valores constituyen las cuatro raíces de la ecuacion de cuarto grado que habíamos pretendido hallar.

Ahora, como α, β, γ y δ, representan las cuatro raíces de la ecuacion $y^4 = 1$, ó sea, $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$, sustituyendo estos valores particulares en (A) se tendrá definitivamente para las raíces de la ecuacion de cuarto grado

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{z'} & \pm \sqrt{z''} \pm \sqrt{z'''}, \\ x &= \mp \sqrt{z'} & \pm \sqrt{z''} \mp \sqrt{z'''}, \\ x &= \pm \sqrt{z'}\,\sqrt{-1} & \mp \sqrt{z''} \mp \sqrt{z'''}\,\sqrt{-1}, \\ x &= \mp \sqrt{z'}\,\sqrt{-1} & \mp \sqrt{z''} \pm \sqrt{z'''}\,\sqrt{-1}, \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

De cada una de estas igualdades basta tomar los signos superiores ó inferiores para tener los valores de las cuatro raíces, segun sea el signo de q correspondiente á la reducida de tercer grado, pues el producto de los tres términos de una cualquiera de las igualdades anteriores debe darnos el valor de q con signo contrario, lo que es fácil de probar, ya sea directamente, ó ya por el método de Cardan. Así, pues, descomponiendo el grupo (B) en dos, segun q sea negativo ó positivo, tendremos las raíces precisas que corresponden en cada caso, correspondientes á la ecuacion de cuarto grado

$$\left.\begin{aligned} x &= +\sqrt{z'} & +\sqrt{z''} + \sqrt{z'''} \\ x &= -\sqrt{z'} & +\sqrt{z''} - \sqrt{z'''} \\ x &= +\sqrt{z'}\,\sqrt{-1} & -\sqrt{z''} - \sqrt{z'''}\,\sqrt{-1} \\ x &= -\sqrt{z'}\,\sqrt{-1} & -\sqrt{z''} + \sqrt{z'''}\,\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} q,\ \text{negativa}$$

Material may be protected by copyright law (Title 17, U.S. Code)

$$\left.\begin{array}{l} x = -\sqrt{z'} \qquad\quad -\sqrt{z''} - \sqrt{z'''} \\ x = +\sqrt{z'} \qquad\quad -\sqrt{z''} + \sqrt{z'''} \\ x = -\sqrt{z'}\,\sqrt{-1} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}\,\sqrt{-1} \\ x = +\sqrt{z'}\,\sqrt{-1} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}\,\sqrt{-1} \end{array}\right\} q\text{, positiva}$$

Al determinar las cuatro raíces de la ecuacion de cuarto grado por el método de Cardan, se encuentran estos mismos valores para las raíces, sólo que todos los términos resultan reales. Esta falta de unidad en los resultados depende de que por la teoría de las determinantes se resuelve la cuestion de un modo más general, pues considerando las raíces de la unidad tanto reales como imaginarias, es preciso suponer la reducida de tercer grado capaz de admitir tambien, si es posible, raíces reales é imaginarias; empero esto se puede suponer, porque si bien debe tener una raíz real y positiva, cabe suponer las otras dos imaginarias. Ahora bien, siguiendo el procedimiento de Cardan, segun este supuesto, resultan para la ecuacion de cuarto grado dos raíces reales y dos imaginarias, conforme hemos hallado directamente por la teoría de las determinantes.

Una duda, no obstante, puede presentarse y que conviene desvanecer. Habiendo dos raíces imaginarias, éstas deben ser conjugadas y en este concepto concretando los valores de z' y z'' en el supuesto de ser las dos imaginarias conjugadas, pudiera creerse que al sumarlas ó restarlas podrian alterar el resultado de las raíces definitivas; pero es fácil ver como á pesar de esto persisten dos raíces reales y otras dos imaginarias en la ecuacion de cuarto grado, conforme vamos á demostrar. Sea $\sqrt{z'} = m + n\sqrt{-1}$, y $\sqrt{z''} = m - n\sqrt{-1}$, sustituyendo estos valores particulares en (B) resulta:

$$\begin{array}{l} x = \pm(m + n\sqrt{-1}) \pm \sqrt{z''} \pm (m - n\sqrt{-1}) \\ x = \mp(m + n\sqrt{-1}) \pm \sqrt{z''} \mp (m - n\sqrt{-1}) \\ x = \pm(m + n\sqrt{-1}) \mp \sqrt{z''} \mp (m - n\sqrt{-1}) \\ x = \mp(m + n\sqrt{-1}) \mp \sqrt{z''} \pm (m - n\sqrt{-1}) \end{array}$$

simplificando se tiene:

$$\begin{array}{l} x = \pm 2m \qquad\quad \pm \sqrt{z''} \\ x = \mp 2m \qquad\quad \pm \sqrt{z''} \\ x = \pm 2n\sqrt{-1} \mp \sqrt{z''} \\ x = \mp 2n\sqrt{-1} \mp \sqrt{z''} \end{array}$$

De modo que hasta en el caso de concretar la cuestion vemos como persisten las dos primeras raíces reales y las otras dos imaginarias, conforme se desprende del cuadro general (B).

Con esto queda, pues, completamente probado como valiéndonos de la teoría de las determinantes hemos logrado expresar las

Material may be protected by copyright law (Title 17, U.S. Code)

cuatro raíces de la ecuacion $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$, con un grado de generalidad mucho mayor que por el procedimiento de Cardan; y si bien las fórmulas reales de aquel autor permiten elevarse al caso del imaginarismo, despues de varios rodeos, coincidiendo el resultado con el que nosotros hemos hallado directamente por medio de la teoría de las determinantes, no cabe duda que es más lógico suponer para fórmulas generales de las raíces, el caso que éstas comprendan cantidades reales é imaginarias, que no el que contengan sólo valores reales.

DESCRIPCION DE LA PILA REYNIER

POR ALFREDO NIAUDET.

Un inventor ya conocido, M. Reynier, acaba de presentar al público una nueva pila, sobre cuyo aparato, del que ya tienen noticia los lectores de la CRÓNICA CIENTÍFICA [1], nos atrevemos á llamar de nuevo la atencion, pues parece está destinado á prestar los más grandes servicios y á reemplazar las pilas de Bunsen y de Grove en todas sus aplicaciones.

La pila está compuesta del siguiente modo: Zinc, sosa, sulfato de cobre, cobre, y deriva de la pila Daniell, puesto que la despolarizacion se obtiene por el sulfato de cobre; gracias á esta circunstancia la pila está completamente despolarizada y si con el tiempo su fuerza electro-motriz disminuye, es sin duda porque los líquidos cambian de composicion. Lo propio sucede con las pilas de Grove y de Bunsen que están ciertamente despolarizadas de una manera completa, pero que á pesar de ello pierden con el tiempo á causa de una disminucion de la fuerza electro-motriz.

La sosa ataca al zinc y forma un zincato de sosa con desprendimiento de hidrógeno; este gas se sustituye á una cantidad equivalente de cobre adquirido del sulfato de cobre, el cobre se deposita sobre el electrodo cobre y el ácido sulfúrico queda en libertad. Por otra parte el sulfato de cobre obra sobre la sosa á través del vaso poroso, se produce sulfato de sosa y se precipita óxido de cobre. Este óxido se combina con el ácido sulfúrico libre del que hemos hablado anteriormente y se trasforma —á lo ménos en parte— en sulfato de cobre.

Estas acciones complejas dan á la pila una fuerza electro-motriz que puede alcanzar 1,52$^{\text{volt.}}$, manteniéndose casi invariable durante dos dias si el circúito permanece abierto. Al cabo de ocho dias y despues de haber abandonado la pila sin funcionar se encuentra que su fuerza electro-motriz es aún superior á 1$^{\text{vol.}}$ todo

[1] Véase la pág. 346.

Material may be protected by copyright law (Title 17, U.S. Code)