THE

QUARTERLY JOURNAL

OF

PURE AND APPLIED

MATHEMATICS.

EDITED BY

N. M. FERRERS, D.D., F.R.S.,

MASTER OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE;

A. CAYLEY, M.A., F.R.S.,

SADLERIAN PROFESSOR OF PURE MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE; AND

J. W. L. GLAISHER, M.A., F.R.S.,

FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

VOL. XIX.

London:

LONGMANS AND CO.

PATERNOSTER ROW.

1883.

SUR UNE APPLICATION D'UN DÉTERMINANT.

Par A. LEGOUX, Professeur à la faculté des sciences à Grenoble.

En lisant dans le numéro du *Quarterly Journal* du mois de Juin, 1880, la note de Mr. Scott sur une forme spéciale de déterminant découverte par Mr. Glaisher, j'ai pensé que l'on pourrait se servir de cette forme pour résoudre algébriquement et *d'une manière uniforme les équations du 3ᵉ et du 4ᵉ degré.* Je ne sais si cette méthode est nouvelle; elle est en tout cas une conséquence bien naturelle de la forme remarquable du déterminant de Mr. Glaisher.

I. Considérons le déterminant suivant d'ordre n

$$R = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \dots\dots a_{n-1} \\ a_{n-1} & x & a_1 \dots\dots a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & x \quad a_1 \dots a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_1 & a_2 & a_3 \qquad a_{n-1} \quad x \end{vmatrix}$$

supposons que x soit une inconnue, et $a_1, a_2 \dots$ des nombres donnés, en égalant à 0 on a une équation d'ordre n, ne contenant pas de terme de degré $n-1$ et renfermant $n-1$ quantités connues. Si ω est une racine primitive de l'equation $x^n - 1 = 0$, le déterminant précédent est le produit des facteurs linéaires suivants,

$$\begin{gathered} x + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \dots a_{n-1}\omega^{n-1}, \\ x + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + \dots a_{n-1}\omega^{2(n-1)}, \\ x + a_1\omega^3 + a_2\omega^6 + a_3\omega^9 + \dots a_{n-1}\omega^{3(n-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x + a_1\omega^n + a_2\omega^{2n} + a_3\omega^{3n} + \dots a_{n-1}\omega^{n(n-1)}, \end{gathered}$$

le dernier facteur est égal à

$$x + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}.$$

On voit que l'on obtiendra les racines de l'équation $R = 0$, en égalant chacun de ces polynomes à 0 et que ces racines seront des fonctions linéaires des quantités $a_1, a_2 \dots$ et des racines imaginaires de l'unité.

On voit aussi que si l'on désigne ces racines par les lettres $x_1, x_2 \ldots x_n$, et si l'on représente par le symbole f l'opération qui consiste, étant donnée l'expression $A_1 a_1 + A_2 a_2 \ldots + A_{n-1} a_{n-1}$, à multiplier le premier terme par ω, le seconde par ω^2, le troisième par ω^3 etc., on aura

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 = a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \ldots a_{n-1}\omega^{n-1} \\ -x_2 = a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + \ldots a_{n-1}\omega^{2(n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots(1).$$

d'où $x_2 = f(x_1)$, de même

$$x_3 = f(x_2),$$
$$x_4 = f(x_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. Si l'on développait le déterminant R, et si on l'ordonnait relativement aux puissances décroissantes de x, on trouverait en l'égalant à 0 une équation

$$x^n + p_2 x^{n-2} - p_3 x^{n-3} \ldots \pm p_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$p_2, p_3 \ldots p_n$ étant des fonctions rationnelles données des quantités $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$.

On peut toujours écrire une équation algébrique sous la forme précédente en faisant disparaître le second terme.

On voit que les coefficients $p_2, p_3 \ldots$ sont en même nombre que les quantités $a_1, a_2 \ldots$, que par conséquent si l'on supposait connus les $p_2, p_3 \ldots$ c'est à dire si l'on partait de l'équation donnée sous la forme (2), on pourrait chercher à l'identifier avec l'équation $R = 0$; ce qui reviendrait à résoudre un système de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues pour déterminer les $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ en fonction des $p_2, p_3 \ldots p_n$. Les quantités $a_1, a_2 \ldots$ étant connues, on aurait les racines de l'équation proposée an moyen des formules (1). Appliquons cette méthode à l'equation du 3e degré:

$$x^3 + p_2 x - p_3 = 0,$$

identifions cette équation avec la suivante

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ a_2 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & x \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} (x + a_1\omega + a_2\omega^2) \\ (x + a_1\omega^2 + a_2\omega) \\ (x + a_1 + a_2) \end{array}\right\} = 0.$$

On trouve

$$3a_1 a_2 = -p_2, \quad a_1^3 + a_2^3 = -p_3.$$

On trouve a_1^3 et a_2^3 en résolvant une équation du 2e degré ; on retombe sur les calculs fournis par la méthode bien connue pour déterminer a_1 et a_2. Ces quantités étant déterminées en fonctions de p_2 et p_3 les trois racines de l'équation cubique proposée seront données par les équations linéaires

$$x+a_1+a_2=0, \quad x+a_1\omega+a_2\omega^2=0, \quad x+a_1\omega^2+a_2\omega=0.$$

Opérons de même sur l'équation du 4e degré

$$x^4+p_2x^2-p_3x+p_4=0.$$

Identifions là avec la suivante :

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & x & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix} (x+a_1i-a_2-a_3i) \\ (x-a_1+a_2-a_3) \\ (x-a_1i-a_2+a_3i) \\ (x+a_1+a_2+a_3) \end{matrix}\right\} = 0, \quad i=\sqrt{(-1)},$$

on trouve

$$-p_2=2(a_2^2+2a_1a_3),$$
$$p_3=-4a_2(a_1^2+a_3^2),$$
$$p_4=(a_2^2-2a_1a_3)^2-(a_1^2+a_3^2)^2,$$

substituant dans la troisième les valeurs de a_1a_3 et de $a_1^2+a_3^2$ données par les deux premières, on a

$$p_4=\left(a_2^2+\frac{p_2+2a_2^2}{2}\right)^2-\frac{p_3^2}{16a_2^2}.$$

On trouve ainsi pour déterminer a_2^2 une équation du 3e degré, a_2 étant connu, on trouvera sans peine a_1 et a_3 ; enfin les quantités a_1, a_2, a_3, étant exprimées en fonction de p_2, p_3, p_4, les racines de l'équation du quatrième degré seront données par les équations linéaires suivantes :

$$x+a_1i-a_2-a_3i=0, \quad x-a_1+a_2-a_3=0,$$
$$x-a_1i-a_2+a_3i=0, \quad x+a_1+a_2+a_3=0.$$