ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

DÉTERMINANTS

AVEC APPLICATION

A L'ALGÈBRE, LA TRIGONOMÉTRIE

ET

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE,

A L'USAGE

DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR G. DOSTOR,

Docteur ès Sciences, Professeur honoraire de la Faculté des Sciences
à l'Institut catholique de Paris,
Membre de la Société mathématique de France.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1883

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

QUI SE TROUVENT A LA MÊME LIBRAIRIE.

Règles mnémoniques pour établir la Théorie des signes en Trigonométrie, et pour écrire les Formules de Delambre. In-8; 1866. 1 fr.

Méthode expéditive pour l'Extraction de la Racine cubique des nombres entiers. In-8; 1866 .... 1 fr.

Propriétés nouvelles des Quadrilatères en général, avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles, etc. In-8; 1868 .... 2 fr. 25 c.

Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation des coordonnées dans le plan et dans l'espace, avec application aux lignes et surfaces des deux premiers degrés. In-8 .... 1 fr. 50 c.

Nouvelle étude algébrique des lignes du second degré.

1re *Partie :* Ellipse et Hyperbole. In-8; 1866 .... 1 fr. 50 c.
2e *Partie :* Parabole. In-8; 1868 .... 1 fr. 50 c.

Théorie générale des polygones étoilés. In-4, avec figures; 1881. 2 fr.

8219 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

AVERTISSEMENT

DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

Cette édition, conforme à la précédente, contient quelques additions : nous avons établi le *produit de deux déterminants* par une seconde méthode, simple et rigoureuse, qui est adoptée dans l'enseignement; nous avons calculé la *dérivée d'un déterminant;* et nous avons déterminé les *invariants en coordonnées* des courbes du second degré. Ces compléments, assez faciles, méritent, par leur importance, de figurer dans un ouvrage élémentaire.

Paris, 1er mai 1883.

G. D.

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

La *Science des Déterminants* est l'un des instruments les plus puissants que l'Analyse mette à la disposition des Géomètres; le mécanisme en est fort simple, les méthodes sont presque élémentaires, les résultats sont d'une fécondité remarquable. Née de la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues, elle en abrège les procédés, en généralise les formules et donne à celles-ci une expression figurée, à la fois simple et précise, serrée et commode, qui rend la combinaison de ces formules sûre et rapide.

L'*Algèbre,* qui a donné naissance aux Déterminants, tire ainsi le premier fruit de son œuvre, au seuil même d'opérations souvent fort laborieuses; mais cet avantage n'est pas le seul tribut que l'Algèbre lève sur cette science nouvelle, éclose dans son domaine : elle y trouve des ressources bien autrement précieuses pour l'élimination d'un ordre supérieur et pour la détermination des solutions communes aux équations de degrés élevés. Ces parties, si épineuses dans la pratique, ont été simplifiées avec art et précision, et des calculs presque inextricables sont devenus d'une facilité merveilleuse et même originale.

En *Géométrie analytique*, pour évaluer les angles, les lignes, les surfaces et les volumes en fonction de certaines données, on établit les relations qu'on sait exister ou qu'on découvre entre ces données, entre la quantité cherchée et entre d'autres éléments *auxiliaires* de la figure, convenablement choisis. Les relations ainsi établies constituent les équations de la question, et les éléments qui y entrent, indépendamment des données, forment autant d'inconnues *auxiliaires*, qu'il s'agit d'éliminer. Cette élimination, par les procédés ordinaires, est souvent longue et compliquée; elle se hérisse quelquefois de difficultés presque insurmontables. De plus, la suite des opérations introduit dans les équations résultantes, pour beaucoup de cas, des facteurs étrangers qui en embarrassent le maniement et masquent les liens apparents qui existent forcément entre les données et la solution.

Ce double inconvénient disparaît par l'emploi des Déterminants. Non seulement les opérations deviennent simples et aisées, non seulement les multiplicateurs étrangers sont écartés; mais les facteurs *utiles* apparaissent presque spontanément et sont immédiatement mis en évidence ; mais encore l'expression de la solution forme tableau, pour ainsi dire, et présente une symétrie remarquable dans la disposition de ses éléments connus.

Les caractères qui distinguent entre elles les lignes et les surfaces d'un même degré, ceux qui embrassent les figures d'une même famille, ainsi que les conditions auxquelles ces figures peuvent être assujetties, se traduisent, dans l'Analyse, par certaines relations entre les coefficients de leur équation générale. C'est encore la Science des Déterminants qui conduit à la détermination la plus rapide, qui fournit la représentation la plus succincte et la mieux figurée de ces relations de condition.

Les Déterminants donnent aussi le moyen de trouver les fonctions qui ne sont pas altérées par une transformation linéaire des variables; la découverte et l'étude de ces fonctions sont peut-être le principal objet de cette science, dont le champ ne cesse de s'étendre et de se féconder. En Géométrie, cette transformation correspond à un changement d'axes de coordonnées; les fonctions obtenues expriment donc des propriétés absolument indépendantes du choix des axes. On comprend dès lors toute l'importance que doit prendre cette branche de l'Analyse dans les investigations géométriques.

L'importance des Déterminants se manifeste par des progrès incessants; elle est partout reconnue et proclamée, dans les

Journaux scientifiques comme dans les Mémoires et les Cours publics. Chaque année voit apparaître de nouvelles publications sur cette féconde théorie et sur ses nombreuses applications. Plusieurs auteurs s'efforcent, en même temps, de donner à cette science une forme plus simple, une rédaction plus élémentaire, une direction plus pratique, afin de la mettre à la portée des jeunes esprits.

Dans beaucoup de pays, en Angleterre, en Italie et en Allemagne, la théorie des Déterminants est prescrite dans l'enseignement et introduite dans les écoles. En France, elle a pénétré dans les lycées de Paris; elle se trouve enseignée dans beaucoup d'établissements de province; elle est admise avec faveur et reçue avec avantage dans les examens d'admission à l'École Polytechnique et à l'École Normale; elle appartient de droit au Cours de Mathématiques spéciales.

Les professeurs, pour se maintenir à la hauteur de leur mission, sont forcés de consulter les Mémoires et les Traités spéciaux; ils sont contraints de puiser dans des publications éparses; ils sont obligés de faire des extraits séparés, d'établir un lien uniforme entre ces extraits, de les revêtir d'une forme simple et élémentaire, afin de les faire cadrer avec les matières de leur enseignement. Cette tâche, toujours laborieuse, souvent difficile par l'absence, l'éloignement ou la variété des sources originales, absorbe leurs loisirs ou dérobe à leurs fonctions une partie du temps qu'ils doivent aux soins immédiats des élèves.

Les élèves eux-mêmes, restreints aux notes fugitives de la classe, sont embarrassés dans l'étude de leurs leçons par les parties qui leur ont échappé ou qu'ils ont mal saisies; ces points d'arrêt ébranlent leur confiance, en provoquant des efforts en pure perte.

Un Livre pouvant servir de guide et d'aide-mémoire aura donc un côté à la fois utile pour les élèves et avantageux pour les maîtres, surtout s'il renvoie, en même temps, aux sources premières, aux documents complets, où la Science est traitée avec tous ses développements.

C'est afin d'abréger le travail des Professeurs, de faciliter l'étude aux Élèves, que nous avons entrepris la rédaction de cet Ouvrage. Nous y avons suivi les procédés les plus élémentaires, adopté les notations les plus simples, exposé les principes les plus essentiels, qui suffisent en Algèbre et en Géométrie, dans l'étendue du programme officiel. Si nous avons modifié plusieurs démonstrations usitées, c'est pour les simplifier, les abréger, les rendre accessibles aux jeunes commençants. C'est surtout pour eux que nous avons entrepris ce travail; c'est aussi à eux que nous l'adressons particulièrement.

La première idée des Déterminants est due à Leibnitz (*Lettre de Leibnitz à L'Hospital*, du 28 avril 1639, et *Œuvres mathématiques de Leibnitz*, publiées par Gerhardt, t. II, p. 239). Mais l'importance de ces fonctions a été signalée surtout par Cramer, dans son *Introduction à l'Analyse des courbes algébriques*, 1750; Cramer peut être regardé comme le second inventeur des Déterminants. Ce Géomètre a trouvé la loi de formation des Déterminants au moyen des formules que fournit la résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues, et de celles que donne la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues. Bézout a étendu cette loi à un nombre quelconque d'équations linéaires, renfermant autant d'inconnues, en même temps qu'il a donné une méthode rapide pour la résolution de ces équations (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1764).

Dans les travaux de Laplace et de Vandermonde (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1772, 2e Partie), dans ceux de Lagrange (*Sur les Pyramides*, 1773, et *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin*, 1773), la loi de Cramer se trouve confirmée et plusieurs propriétés des Déterminants sont énoncées et mises au jour.

L'illustre Gauss, dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, 1802, a perfectionné et étendu le calcul algébrique, au moyen des Déterminants. Plus tard, Binet (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIe cahier, 1813) et Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, 1815) ont énoncé de nouvelles propriétés et ont donné, dans les applications, au moyen des Déterminants, une facilité inattendue à des calculs fort compliqués.

Ce n'est cependant qu'en 1841 que JACOBI, dans son Mémoire *De formatione et proprietatibus determinantium*, posa les bases d'un Traité concernant la Théorie des Déterminants, et rendit cette science accessible à tous les mathématiciens.

Depuis cette époque, la Science des Déterminants a été l'objet de recherches incessantes de la part des géomètres, les progrès ont été rapides. Elle s'est signalée surtout par ses applications curieuses et variées à la Théorie des nombres, à celle des Équations, à l'Analyse en général, à la Géométrie et à la Mécanique.

Ces applications sont consignées, d'abord en partie dans les écrits de Jacobi (*Mathematische Werke*) et de Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*); ensuite dans les Mémoires publiés par MM. CAYLEY (*Memoirs upon quantics*), SYLVESTER (*Philosophical Magazine*), HESSE, BORCHARDT, MALMSTEIN, JOACHIMSTHAL (*Journal de Crelle*).

L'emploi le plus heureux et le plus efficace des Déterminants a été fait par M. HERMITE, dans ses savantes et profondes recherches sur la Théorie des nombres, et dans ses travaux d'Analyse. Il en a publié les remarquables résultats dans les *Journaux de Crelle, de Liouville*, etc.

M. SALMON a puissamment contribué à la propagation de cette science par la publication d'Ouvrages spéciaux et par les applications à la Géométrie, qu'il a données dans son Traité *On the higher plane curves.*

Les fonctions de Cramer étaient d'abord appelées *résultantes;* la dénomination de *Déterminant,* empruntée à Gauss, a été introduite dans la Science par Cauchy, qui lui a substitué plus tard le nom de *fonction alternée.* L'usage a fait maintenir le nom de *Déterminant.*

Paris, mars 1877.

G. D.

AVIS ESSENTIEL AU LECTEUR.

Le texte courant de ce Traité forme la partie la plus élémentaire de la *Théorie des Déterminants;* il comprend, en outre, toutes les applications de cette science aux diverses matières qui constituent le programme des Mathématiques spéciales. Le lecteur peut en faire une étude suivie, en négligeant tout ce qui est imprimé en petits caractères.

Les autres articles, non revêtus d'astérisques, peuvent être lus ensuite; ils complètent le cours. Sans être indispensables, ils fournissent des résultats utiles et intéressants, dont l'Élève saura apprécier l'importance.

La partie en petit texte, qui est affectée d'astérisques, ne présente aucune difficulté. Elle résume plusieurs applications curieuses des Déterminants à l'Algèbre et à la Géométrie analytique; celles-ci reposent sur des méthodes, à la fois simples et rapides, qui trouvent un emploi fort avantageux dans beaucoup de branches des Sciences exactes.

§ V. — Résolution de l'équation du troisième degré.

169. Considérons le déterminant du troisième ordre

$$(1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

nous en obtenons la valeur développée, en l'ordonnant suivant les éléments de la première colonne; il nous vient ainsi

$$\Delta = a\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix}$$
$$= a(bc - a^2) + b(ca - b^2) + c(ab - c^2),$$

ou

$$(2)\qquad \Delta = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Nous trouverons une autre expression de Δ, en augmentant, dans (1), la première colonne de la somme des deux autres; ce qui nous donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix},$$

et prouve que le polynôme (2) admet le diviseur $a + b + c$.

Soit α l'une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, l'autre sera α^2. Si dans (2) nous remplaçons a et b respectivement par $a\alpha$ et $b\alpha^2$, ce polynôme devient

$$3a\alpha.b\alpha^2.c - (a^3\alpha^3 + b^3\alpha^6 + c^3)$$
$$= 3abc.\alpha^3 - (a^3 + b^3\alpha^3 + c^3)\alpha^3 = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3),$$

attendu que $\alpha^3 = 1$; ce polynôme n'a donc pas changé et l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha^2 & c \\ b\alpha^2 & c & a\alpha \\ c & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\alpha^2 + c & b\alpha^2 & c \\ b\alpha^2 + c + a\alpha & c & a\alpha \\ c + a\alpha + b\alpha^2 & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix},$$

ou

$$\Delta = (a\alpha + b\alpha^2 + c)\begin{vmatrix} 1 & b\alpha^2 & c \\ 1 & c & a\alpha \\ 1 & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix};$$

donc le polynôme (2) est aussi divisible par $a\alpha + b\alpha^2 + c$.

On verrait de même qu'il est encore divisible par $a\alpha^2 + b\alpha + c$.

Il vient ainsi, quels que soient a, b et c,

$$\begin{aligned} &3abc - (a^3 + b^3 + c^3) \\ &\quad = (a + b + c)(a\alpha + b\alpha^2 + c)(a\alpha^2 + b\alpha + c) \times q; \end{aligned}$$

or, pour $a = 0$ et $b = 0$, les deux membres se réduisent à $-c^3$ et $c^3 q$; par suite, q est égal à -1 et l'on a

$$(3) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a\alpha + b\alpha^2 + c)(a\alpha^2 + b\alpha + c).$$

Dans cette identité remplaçons c par $-x$; elle devient, par le changement des signes,

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = (x - a - b)(x - a\alpha - b\alpha^2)(x - a\alpha^2 - b\alpha),$$

et donne

$$(4) \qquad x_1 = a + b, \quad x_2 = a\alpha + b\alpha^2, \quad x_3 = a\alpha^2 + b\alpha$$

pour les trois racines de l'équation

$$(5) \qquad x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0.$$

Si l'on avait à résoudre l'équation

$$(6) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

il suffirait de poser dans (5)

$$ab = -\frac{p}{3}, \quad a^3 + b^3 = -q,$$

ce qui donnerait pour a et b les valeurs connues

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Les trois racines de l'équation (6) seront donc

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{-3} - 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} - \frac{\sqrt{-3} + 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{-3} - 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} - \frac{\sqrt{-3} + 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

170. Nous venons de voir que le déterminant (1) du troisième ordre se décompose en un produit de trois facteurs du premier degré par rapport aux quantités a, b et c. Cette décomposition constitue un cas particulier de la proposition suivante.

Théorème. — *Lorsqu'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre*

$$(7) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & k & l \\ b & c & \ldots & k & l & a \\ c & \ldots & k & l & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l & a & b & c & \ldots & k \end{vmatrix}$$

a pour lignes ou pour colonnes les n permutations circulaires que l'on peut former avec une suite de n quantités

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad k, \quad l,$$

ce déterminant est le produit de n facteurs du premier degré par rapport à ces quantités. Ces facteurs sont les sommes des produits que l'on obtient, en multipliant ces quantités par les n puissances successives de chacune des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Soient α, β, γ, ..., λ les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. A la première colonne de Δ ajoutons les $n-1$ autres colonnes multipliées respectivement par les $n-1$ premières puissances de α ; nous aurons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + k\alpha^{n-2} + l\,\alpha^{n-1} & b & c & \ldots & k & l \\ b + c\alpha + \ldots\ldots\ldots + l\,\alpha^{n-2} + a\alpha^{n-1} & c & \ldots & k & l & a \\ c + \ldots\ldots\ldots\ldots + a\alpha^{n-2} + b\alpha^{n-1} & \ldots & k & l & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l + a\alpha + b\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + k\alpha^{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & k \end{vmatrix}.$$

Appelons A le premier élément

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1}$$

de la première colonne; nous avons le second élément de cette colonne

$$b + c\alpha + \ldots + l\alpha^{n-2} + a\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1} + a) = \alpha^{n-1}.\mathrm{A},$$

attendu que

$$\alpha^{n-1}.\alpha = \alpha^n = 1, \quad \alpha^{n-1}.\alpha^2 = \alpha^n.\alpha = \alpha, \quad \ldots, \quad \alpha^{n-1}.\alpha^{n-1} = \alpha^n.\alpha^{n-2} = \alpha^{n-2};$$

il s'ensuit que le premier élément A de la première colonne divise le second élément de cette colonne; il est facile de voir que A divise aussi le troisième élément, le quatrième et jusqu'au dernier élément de la première colonne; donc le déterminant Δ est divisible par

$$\mathrm{A} = a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1}.$$

On verrait de même qu'il est divisible par

$$\mathrm{B} = a + b\beta + c\beta^2 + \ldots + l\beta^{n-1},$$
$$\mathrm{C} = a + b\gamma + c\gamma^2 + \ldots + l\gamma^{n-1},$$

et ainsi de suite. Ce déterminant Δ est donc de la forme

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = \ & \mathrm{K}(a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1}) \\ & \times (a + b\beta + c\beta^2 + \ldots + l\beta^{n-1}) \\ & \times (a + b\gamma + c\gamma^2 + \ldots + l\gamma^{n-1}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (a + b\lambda + c\lambda^2 + \ldots + l\lambda^{n-1}); \end{aligned} \right.$$

mais l'hypothèse $a = b = c = \ldots = k = 0$ réduit le déterminant (7) à la seconde diagonale, qui est composée de n éléments égaux à l; la valeur de ce déterminant se réduit donc à $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} l^n$. La même hypothèse réduit le déterminant (8) à $\mathrm{K}l^n$. Donc on a $\mathrm{K} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

§ VI. — Les différences des racines d'une équation.

171. Produit des différences de n quantités. — Soient données les n quantités quelconques

$$(1) \qquad a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad k, \quad l$$