1896.
L.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

3. December. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

Hr. Frobenius las die umstehend folgende Abhandlung: Über die Primfactoren der Gruppendeterminante.

Über die Primfactoren der Gruppendeterminante.

Von G. Frobenius.

Die Theorie der Charaktere einer Gruppe, deren Grundlagen ich in meiner letzten Arbeit entwickelt habe, erfordert zu ihrer weiteren Ausgestaltung die Untersuchung einer Determinante, deren Grad der Ordnung der Gruppe gleich ist. Nach dem Vorgange von Dedekind, der zuerst ihre Bedeutung für die Theorie der Gruppen erkannt und meine Aufmerksamkeit auf sie gelenkt hat, nenne ich sie die der Gruppe entsprechende *Gruppendeterminante*. Die h Elemente $A, B, C, \cdots$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ benutze ich als Indices für h unabhängige Variabele $x_A, x_B, x_C, \cdots$. Indem ich diese Bezeichnung wähle, treffe ich die Festsetzung, dass, wenn $L = MN$ ist, auch $x_L = x_{MN}$ sein soll. Aus diesen h Grössen, die durch einen Index von einander unterschieden sind, bilde ich h^2 Grössen, die mit zwei Indices versehen sind, indem ich $x_{P,Q} = x_{PQ^{-1}}$ setze. Sind $G_1, G_2, \cdots G_h$ die h Elemente von $\mathfrak{H}$ in irgend einer bestimmten Reihenfolge, so betrachte ich die Matrix $(x_{P,Q}) = (x_{PQ^{-1}})$, deren h Zeilen man erhält, indem man für P der Reihe nach die h Elemente $G_1, G_2, \cdots G_h$ setzt, und deren h Spalten man erhält, indem man für Q dieselben h Elemente in derselben Reihenfolge setzt. Diese Matrix besitzt gewisse, durch die Constitution der Gruppe $\mathfrak{H}$ bedingte Symmetrieeigenschaften. In jeder Zeile finden sich die h Variabelen sämmtlich und ebenso in jeder Spalte. Die verschiedenen Zeilen (Spalten) unterscheiden sich von einander nur durch die Anordnung der Variabelen. Die Gruppendeterminante, die der Gruppe $\mathfrak{H}$ entspricht, ist die Determinante dieser Matrix

$$\Theta = |x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}|.$$

Addirt man zu den Elementen der ersten Zeile die aller anderen Zeilen, so werden jene Elemente alle gleich $\Sigma\, x_R = \xi$. Daher ist die ganze Function h^{ten} Grades Θ der h Variabelen $x_A, x_B, x_C, \cdots$ durch die lineare Function ξ theilbar. Mithin zerfällt Θ, von dem trivialen Falle $h = 1$ abgesehen, stets in Factoren niedrigeren Grades. Die Anzahl k der verschiedenen irreducibelen Factoren oder Primfactoren von

Θ ist gleich der Anzahl der Classen conjugirter Elemente, worin die Elemente von $\mathfrak{H}$ zerfallen. Ist f der Grad eines solchen Primfactors Φ, so ist Θ durch die f^{te} und durch keine höhere Potenz von Φ theilbar. Der Grad f ist ein Divisor der Ordnung h. Durch eine lineare Substitution lässt sich Φ in eine Function von f^2, aber nicht von weniger Variabelen transformiren, und wenn man jeden Primfactor von

$$\Theta = \Pi\,\Phi^f$$

in dieser Weise umformt, so sind die $\Sigma f^2 = h$ neuen Variabelen alle unter einander unabhängig. Setzt man immer diejenigen Variabelen x_R einander gleich, deren Indices Elemente derselben Classe sind, so wird

$$\Phi = \xi^f$$

die f^{te} Potenz einer linearen Function ξ von k unabhängigen Variabelen, und die k linearen Functionen, die so aus den k Primfactoren von Θ entspringen, sind linear unabhängig. Aus den Coefficienten der linearen Function ξ ergiebt sich ein Charakter χ der Gruppe $\mathfrak{H}$, und aus seinen k Werthen $\chi(R)$ lassen sich die Coefficienten der Primfunction Φ sämmtlich berechnen. Die Theorie der allgemeinen Gruppendeterminante, worin die h Grössen x_R unbeschränkt veränderlich sind, wird so auf die Theorie der speciellen Gruppendeterminante zurückgeführt, worin die Veränderlichkeit dieser Grössen durch die Bedingungen $x_{BA} = x_{AB}$ beschränkt ist. Die Berechnung dieser Determinante h^{ten} Grades aber

$$\Theta = \Pi\,\xi^{f^2}$$

lässt sich auf die einer Determinante k^{ten} Grades

$$\left| \sum_\gamma \frac{1}{h_\alpha} h_{\alpha\beta'\gamma}\, x_\gamma \right| = \Pi\,\xi$$

reduciren, worin der lineare Factor ξ, der in Θ zur Potenz f^2 erhoben vorkommt, nur einfach enthalten ist. Die Definition der positiven ganzen Zahlen $h_{\alpha\beta\gamma}$ und die Entwicklung ihrer Beziehungen zu den Charakteren bildet den Hauptinhalt meiner Arbeit *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte 1896, die ich im Folgenden mit *Ch.* citiren werde.

Ganz analoge Eigenschaften, wie ein solcher Primfactor Φ einer Gruppendeterminante, hat die ganze Function $2^{\varrho\,\text{ten}}$ Grades von $2^{2\varrho}$ Variabelen, die ich in meiner Arbeit *Über Thetafunctionen mehrerer Variabelen* (Crelle's Journal Bd. 96) untersucht habe, auf die ich dort aber nicht durch die Betrachtung der Gruppe der zwischen den Thetafunctionen bestehenden Relationen, sondern durch das für diese Functionen geltende Additionstheorem geführt worden bin. Sonst ist die Gruppendeterminante bisher nur für den Fall commutativer Gruppen untersucht worden, wo ihre Primfactoren sämmtlich linear sind. Für einige besonders einfache, nicht commutative Gruppen hat Dedekind im Jahre 1886 die Determinante Θ durch Rechnung in Primfactoren zerfällt, und seine interessanten Ergebnisse, die er mir vor kurzem mitgetheilt hat, haben mich veranlasst, die Zerlegung der Gruppendeterminante in Primfactoren allgemein für eine beliebig gegebene Gruppe zu untersuchen.

§ 1.

Die Determinante der Matrix h^{ten} Grades

$$(1.)\qquad (x_{P,Q}) = (x_{PQ^{-1}}) = (x)$$

bezeichne ich mit

$$(2.)\qquad |x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}| = \Theta(x_E, x_A, x_B, x_C, \cdots) = \Theta(x_R) = \Theta(x) = \Theta.$$

Unter E verstehe ich immer das Hauptelement. In dem Zeichen $\Theta(x_R)$ bedeutet R ein veränderliches Element, für das die h Elemente $E, A, B, C, \cdots$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ zu setzen sind. Bei Anwendung der Bezeichnung (x) oder $\Theta(x)$ ist x ein leeres Zeichen, das erst dadurch eine Bedeutung erhält, dass daran die Indices $E, A, B, C, \cdots$ angehängt werden.

Nun sei $y_E, y_A, y_B, y_C \cdots$ ein zweites System von h unabhängigen Variabelen. Aus ihnen bilde ich die Matrix

$$(3.)\qquad (y_{P,Q}) = (y_{PQ^{-1}}) = (y).$$

Ihre Zeilen (Spalten) erhält man, indem man für $P(Q)$ die h Elemente $G_1, G_2, \cdots G_h$ von $\mathfrak{H}$ in derselben Reihenfolge setzt, in der sie bei der Bildung der Matrix (1.) benutzt sind.

Aus jenen beiden Systemen von je h Variabelen x_R und y_R bilde ich ein drittes System z_R, indem ich

$$(4.)\qquad z_A = \Sigma\, x_R y_S \qquad (RS = A)$$

setze. In dieser Summe sind für R die h Elemente von $\mathfrak{H}$ zu setzen, und jedes Element R ist mit dem Elemente S $(= R^{-1}A)$ zu verbinden, das der Bedingung $RS = A$ (nicht $SR = A$) genügt, so dass auch S die h Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft, jedes Mal verbunden mit $R = AS^{-1}$. Dann ergiebt sich durch Zusammensetzung der beiden Matrizen (1.) und (3.), welche die hier vorausgesetzten, durch die Constitution der Gruppe $\mathfrak{H}$ bedingten Symmetrieeigenschaften besitzen, die Matrix

$$(5.)\qquad (z_{P,Q}) = (z_{PQ^{-1}}) = (z) = (x)(y)$$

mit denselben Symmetrieeigenschaften. Denn es ist

$$z_{P,Q} = \sum_R x_{P,R}\, y_{R,Q} = \sum_R x_{PR^{-1}}\, y_{RQ^{-1}}.$$

Setzt man in dieser Summe $R = SQ$, so durchläuft S gleichzeitig mit R die h Elemente von $\mathfrak{H}$, nur in einer anderen Reihenfolge, und es wird nach (4.)

$$z_{P,Q} = \sum_S x_{PQ^{-1}S^{-1}}\, y_S = z_{PQ^{-1}}.$$

Derselbe Satz gilt, wenn man beliebig viele derartige Matrizen zusammensetzt. Sind z. B. $z_E, z_A, z_B, z_C, \cdots$ h beliebige Grössen, und setzt man

$$v_A = \sum x_R\, y_S\, z_T, \qquad (RST = A)$$

so ist die Matrix $(v_{PQ^{-1}}) = (v) = (x)(y)(z)$ aus den drei Matrizen (x), (y) und (z) in dieser Reihenfolge zusammengesetzt. Setzt man die Matrix (x) n Mal mit sich selbst zusammen, so möge sich die Matrix

$$(x_{P,Q})^n = (x)^n = (x^{(n)}_{PQ^{-1}}) = (x^{(n)})$$

ergeben. Dann ist

$$x^{(n)}_R = \sum x_{R_1}\, x_{R_2} \cdots x_{R_n}. \qquad (R_1 R_2 \cdots R_n = R) \tag{6.}$$

Demnach besitzt auch jede Function der Matrix (x) die hier vorausgesetzten Symmetrieeigenschaften, z. B. die zu (x) *adjungirte Matrix*. (*Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Crelle's Journal Bd. 84 S. 7), ebenso die *Hauptmatrix* (Einheitsmatrix)

$$(x)^0 = (\varepsilon_{P,Q}) = (\varepsilon_{PQ^{-1}}) = (\varepsilon),$$

wo $\varepsilon_R = 0$ ist, ausser wenn $R = E$ ist, und $\varepsilon_E = 1$ ist.

Nun seien Φ, Φ', Φ'', $\cdots$ die verschiedenen in

$$\Theta = \Phi^e \Phi'^{e'} \Phi''^{e''} \cdots = \Pi\, \Phi^e \tag{7.}$$

aufgehenden unzerlegbaren Functionen (Primfunctionen), und seien $f, f', f'' \cdots$ die Grade dieser ganzen homogenen Functionen der h Variabelen $x_E, x_A, x_B, x_C, \cdots$. In der Gruppendeterminante Θ sind die Elemente der Diagonale und nur diese gleich x_E. Daher reducirt sich Θ auf x_E^h, wenn man alle Variabelen ausser x_E gleich Null setzt, und folglich reducirt sich dann auch Φ auf die f^{te} Potenz von x_E. Daher kann man den noch unbestimmten constanten Factor von Φ so wählen, dass in dieser Function x_E^f den Coefficienten 1 hat.

Nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten folgt aus den Gleichungen (2.) und (5.) die Relation

$$\Theta(z) = \Theta(x)\ \Theta(y). \tag{8.}$$

Daraus ergiebt sich für jeden Primfactor von Θ

$$\Phi = \Phi(x_E, x_A, x_B, x_C, \cdots) = \Phi(x_R) = \Phi(x)$$

die analoge Relation

$$\Phi(z) = \Phi(x)\,\Phi(y), \text{ wenn } (z) = (x)\,(y) \tag{9.}$$

ist, durch welche die Function Φ unabhängig von ihrer Beziehung zur Gruppendeterminante Θ charakterisirt werden kann. Denn zerlegt man die rechte Seite der Gleichung (8.) in Primfactoren, so folgt daraus, dass $\Phi(z)$ in das Product einer Function $\Lambda(x)$ der h Variabelen x_R allein und einer Function $\mathrm{M}(y)$ der h Variabelen y_R allein zerfällt. Setzt man dann in der Gleichung $\Phi(z) = \Lambda(x)\,\mathrm{M}(y)$ $y_R = \varepsilon_R$, so wird $z_R = x_R$, also $\Phi(x) = \Lambda(x)\,\mathrm{M}(\varepsilon)$. Ebenso ist $\mathrm{M}(y) = \Lambda(\varepsilon)\,\Phi(y)$ und $\Lambda(\varepsilon)\,\mathrm{M}(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) = 1$.

Umgekehrt muss jede unzerlegbare ganze homogene Function Φ von $x_E, x_A, x_B, \cdots$, die der Bedingung (9.) genügt, ein Factor der Gruppendeterminante $\Theta(x)$ sein. Denn setzt man in dieser Gleichung für (y) die zu (x) adjungirte Matrix, so wird $z_R = \varepsilon_R\,\Theta(x)$, also

$$\Phi(z) = \Theta(x)^f = \Phi(x)\,\Phi(y),$$

wo y_A eine ganze Function der h Variabelen x_R ist. Daher muss die Function $\Phi(x)$, weil sie unzerlegbar ist, ein Factor von $\Theta(x)$ sein.

Mit Hülfe der Relation (9.) lassen sich alle Eigenschaften der Determinanten, die aus dem Multiplicationstheorem fliessen, auf die Primfactoren der Gruppendeterminante übertragen, namentlich die Eigenschaften, welche ich in meiner im Folgenden mit *V.* citirten Arbeit *Über vertauschbare Matrizen* (S. 601 dieses Bandes) entwickelt habe.

§ 2.

Jeder Primfactor $\Phi(x)$ der Gruppendeterminante genügt der Bedingung

$$\Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y), \tag{1.}$$

falls

$$z_C = \Sigma x_A\, y_B \qquad (AB = C) \tag{2.}$$

gesetzt wird. Mit Hülfe dieser Beziehung lassen sich die linearen Factoren

$$\Phi(x) = \Sigma\, \chi(A) x_A \tag{3.}$$

vollständig bestimmen. Denn aus der Gleichung

$$(\Sigma\, \chi(A)\, x_A)\, (\Sigma\, \chi(B)\, y_B) = (\Sigma\, \chi(C)\, z_C) = \Sigma\, \chi(AB)\, x_A\, y_B$$

ergiebt sich für die Coefficienten $\chi(A)$ dieser Functionen die Relation

$$\chi(AB) = \chi(A)\chi(B). \tag{4.}$$

Mithin ist $\chi(E)=1$, $\chi(A)\chi(A^{-1})=1$ und allgemeiner $\chi(ABCD\cdots) = \chi(A)\chi(B)\chi(C)\chi(D)\cdots$, und folglich

$$\chi(B^{-1}A^{-1}BA)=\chi(B^{-1})\chi(A^{-1})\chi(B)\chi(A)=1.$$

Das Element F, das sich mittelst der Gleichung

$$BA = ABF \tag{5.}$$

aus A und B ergiebt, nenne ich nach Dedekind den *Commutator* von A und B. Demnach ist $\chi(F)=1$ für jeden Commutator F von irgend zwei Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}$. Ist T ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}$, und ist

$$T^{-1}AT=A',\qquad T^{-1}BT=B',\qquad T^{-1}FT=F',$$

so ist auch $B'A'=A'B'F'$. Ist also F ein Commutator, so ist auch jedes mit F conjugirte Element F' ein solcher. Theilt man die Elemente von $\mathfrak{H}$ in Classen conjugirter Elemente, so werden die Commutatoren von den sämmtlichen Elementen einiger dieser Classen gebildet. Die von ihnen erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}$ ist daher eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. (Sie kann auch gleich $\mathfrak{H}$ sein oder auch gleich der Hauptgruppe $\mathfrak{E}$, das letztere stets und nur dann, wenn $\mathfrak{H}$ eine commutative Gruppe ist.) Ist G ein Element von $\mathfrak{G}$, so giebt es solche Commutatoren $F, F', F'', \cdots$ (die nicht verschieden zu sein brauchen), dass $G=FF'F''\cdots$ ist. Daher ist $\chi(G)=\chi(F)\chi(F')\chi(F'')\cdots=1$. Nun sei

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{G}A+\mathfrak{G}B+\mathfrak{G}C+\cdots,$$

seien also $A, B, C, \cdots$ die (mod. $\mathfrak{G}$) verschiedenen Elemente von $\mathfrak{H}$. Ihre Anzahl ist $\frac{h}{g}$, wenn g die Ordnung von $\mathfrak{G}$ ist. Die $\frac{h}{g}$ Complexe $\mathfrak{G}A=A\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}B=B\mathfrak{G}, \cdots$ bilden eine Gruppe, die mit $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ bezeichnet wird. Ist $\mathfrak{G}$ die Commutatorgruppe, so ist $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ eine commutative (Abel-sche) Gruppe, und damit $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ eine commutative Gruppe sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $\mathfrak{G}$ durch die Commutatorgruppe theilbar ist. Denn sind $\mathfrak{G}A$ und $\mathfrak{G}B$ zwei Elemente von $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, so giebt es in $\mathfrak{G}$ ein solches Element F, dass $BA=ABF$ ist, also auch $\mathfrak{G}BA=\mathfrak{G}ABF$. Nun ist $\mathfrak{G}ABF=(\mathfrak{G}A)(\mathfrak{G}B)(\mathfrak{G}F)$ und $\mathfrak{G}F=\mathfrak{G}$, also

$$(\mathfrak{G}B)(\mathfrak{G}A)=(\mathfrak{G}A)(\mathfrak{G}B).$$

Diese Eigenschaften der Commutatorgruppe hat Dedekind im Jahre 1880 gefunden. Veröffentlicht aber sind sie zuerst von Miller, *The regular substitution groups whose order is less than 48.* Quarterly Journal of Math. 1896, vol. 28, p. 266.

Ist G irgend ein Element von $\mathfrak{G}$, so ist $\chi(GA)=\chi(G)\chi(A)=\chi(A)$. Daher hat $\chi(R)$ für alle Elemente R des Complexes $\mathfrak{G}A$ denselben

Werth. Mithin kann man auch die Zahl $\chi(A)$ dem Complexe $\mathfrak{G}A$ zuordnen. Da diese Complexe eine commutative Gruppe bilden, und die ihnen zugeordneten Zahlen $\chi(A)$ die Eigenschaft (4.) haben, so bilden die Zahlen $\chi(A), \chi(B), \chi(C), \cdots$ einen Charakter der commutativen Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$. Für eine solche giebt es bekanntlich immer $\frac{h}{g}$ verschiedene Charaktere, deren Werthe sämmtlich Einheitswurzeln sind. Ist ψ einer derselben, und setzt man für jedes in dem Complexe $\mathfrak{G}A$ enthaltene Element R $\chi(R) = \psi(\mathfrak{G}A)$, so ist für jedes Element G der Gruppe $\mathfrak{G}$ $\chi(G) = 1$, und es gilt für je zwei Elemente von $\mathfrak{H}$ die Gleichung (4.). Ferner ist dann die Function (3.), deren Coefficienten diese Werthe $\chi(A)$ sind, ein linearer Factor der Gruppendeterminante Θ. Denn setzt man $y_R = \chi(R)\, x_R$, so ist

$$y_{PQ^{-1}} = \chi(PQ^{-1})\, x_{PQ^{-1}} = \chi(P)\chi(Q^{-1})\, x_{PQ^{-1}},$$

und mithin ist $|y_{PQ^{-1}}| = |x_{PQ^{-1}}|$. Diese Determinante enthält aber den Factor $\Sigma y_R = \Sigma \chi(R)\, x_R = \Phi$, und zwar nur in der ersten Potenz. Denn addirt man die Elemente aller Zeilen zu denen der ersten Zeile, so werden dieselben alle gleich $\Sigma y_R = \Phi$, und wenn man dann den Factor Φ aufhebt, alle gleich 1. Zieht man nun die Elemente der ersten Spalte von denen der folgenden ab, so erkennt man, dass $\Theta : \Phi$ nur von den Differenzen $y_B - y_A$ abhängt. Mithin kann dieser Quotient nicht noch einmal durch die Summe Σy_R theilbar sein.

Folglich ist die Anzahl der linearen Factoren der Gruppendeterminante gleich dem Quotienten aus der Ordnung der Gruppe und der Ordnung ihrer Commutatorgruppe, und jeder lineare Factor ist nur in der ersten Potenz in Θ enthalten.

Diesen Satz hat DEDEKIND durch Induction gefunden. Einen Linearfactor, nämlich Σx_R, giebt es immer. Der entsprechende Charakter, $\chi(R) = 1$ für jedes Element R, heisst der *Hauptcharakter*. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, so giebt es keinen anderen Linearfactor. Dies muss stets eintreten, wenn $\mathfrak{H}$ eine einfache Gruppe ist, deren Ordnung eine zusammengesetzte Zahl ist.

§ 3.

Man wähle jetzt eine beliebige ganze Zahl $f \leqq h$ und versuche eine ganze Function f^{ten} Grades Φ der h Variabelen $x_E, x_A, x_B, \cdots$ zu bilden, die der Bedingung (9.) § 1 genügt. In dieser muss der Coefficient von x_E^f gleich 1 sein. Denn setzt man $y_R = \varepsilon_R$, so wird $z_R = x_R$, also $\Phi(x) = \Phi(x)\Phi(\varepsilon)$, und mithin ist $\Phi(\varepsilon) = 1$. $\Phi(\varepsilon)$ ist aber der Coefficient von x_E^f in $\Phi(x)$. Ich bezeichne nun, wenn R von E verschieden ist, den Coefficienten von $x_E^{f-1} x_R$ in $\Phi(x)$ mit $\chi(R)$, setze aber

$$(1.) \qquad \chi(E) = f.$$

Für jedes Element R ist dann $\chi(R)$ der Coefficient von x_E^{f-1} in $\frac{\partial\Phi}{\partial x_R}$. Ist u eine Variabele, so setze ich zur Abkürzung

$$\Phi(x+u\varepsilon) = \Phi(x_E+u,\, x_A,\, x_B,\, x_C,\, \cdots).$$

Das Zeichen u, das eine veränderliche Grösse bezeichnet, ist hier scharf zu unterscheiden von den leeren Zeichen x und ε, die erst durch Anhängen der Indices $E, A, B, C, \cdots$ eine Bedeutung erhalten. Ist nun

$$(2.) \qquad \Phi(x+u\varepsilon) = u^f + \Phi_1 u^{f-1} + \Phi_2 u^{f-2} + \cdots + \Phi_f,$$

so ist Φ_n eine ganze homogene Function n^{ten} Grades der h Variabelen $x_E, x_A, x_B, x_C, \cdots$, und zwar ist $\Phi_f = \Phi$ und

$$(3.) \qquad \Phi_n = \frac{1}{(f-n)!}\,\frac{\partial^{f-n}\Phi}{\partial x_E^{f-n}}, \qquad \frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial x_E} = (f-n)\Phi_n.$$

Endlich ist

$$(4.) \qquad \Phi_1 = \Sigma\, \chi(R)\, x_R.$$

Die h Constanten $\chi(R)$ betrachte ich als die Werthe einer Function χ. Ist Φ unzerlegbar, so nenne ich χ den *Charakter f^{ten} Grades* der Gruppe $\mathfrak{H}$, welcher der Primfunction f^{ten} Grades Φ entspricht.

Ist speciell $\Sigma\,\psi(R)x_R$ ein linearer Factor von Θ, so heisst $\psi(R)$ ein Charakter ersten Grades von $\mathfrak{H}$. Dafür ist, wie oben gezeigt, die Relation

$$\psi(A)\,\psi(B) = \psi(AB)$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung. Setzt man $\psi(R)x_R = y_R$, so ist $\Theta(y) = \Theta(x)$. Ist also $\Phi(x)$ ein Primfactor f^{ten} Grades von $\Theta(x)$, so ist auch $\Phi(y)$ ein solcher. In diesem ist der Coefficient von $x_E^{f-1}x_R$ gleich $\chi(R)\psi(R)$. Es gilt also der Satz:

Ist $\chi(R)$ ein Charakter f^{ten} Grades und $\psi(R)$ ein Charakter ersten Grades von $\mathfrak{H}$, so ist auch $\chi(R)\psi(R)$ ein Charakter f^{ten} Grades von $\mathfrak{H}$.

Dieser neue Charakter ist gleich $\chi(R)$, wenn $\psi(R)$ der *Hauptcharakter* ist. Er braucht aber auch in anderen Fällen nicht von $\chi(R)$ verschieden zu sein, nämlich, wenn $\chi(R) = 0$ ist für jedes solche Element R, wofür $\psi(R)$ von 1 verschieden ist.

Seien $u_1, u_2, \cdots u_f$ die f Werthe von $-u$, wofür

$$(5.) \qquad \Phi(x+u\varepsilon) = (u+u_1)(u+u_2)\cdots(u+u_f)$$

verschwindet. Seien $a, v_1, v_2, \cdots v_n$ Constanten und

$$g(u) = a(u+v_1)(u+v_2)\cdots(u+v_n)$$

eine ganze Function von u. Dann ist auch, falls man die Variabele u durch die Matrix (x) ersetzt,

$$(y) = g((x)) = a((x)+v_1(\varepsilon))((x)+v_2(\varepsilon))\cdots((x)+v_n(\varepsilon)).$$

Mithin findet man durch wiederholte Anwendung der Relation (9.) § 1

$$\Phi(y) = a^f\Phi(x+v_1\varepsilon)\Phi(x+v_2\varepsilon)\cdots\Phi(x+v_n\varepsilon).$$

Setzt man hier

$$\Phi(x+v\varepsilon) = (u_1+v)(u_2+v)\cdots(u_f+v),$$

so ergiebt sich der Satz: Ist die Matrix $(y) = g((x))$ eine ganze Function der Matrix (x), so ist

$$\Phi(y) = g(u_1)g(u_2)\cdots g(u_f).$$

Ersetzt man hier $g(u)$ durch $g(u)+v$, wo v ein Parameter ist, behält aber die Abkürzung (y) für $g((x))$ bei, so ergiebt sich die Gleichung

$$\Phi(y+v\varepsilon) = (v+g(u_1))(v+g(u_2))\cdots(v+g(u_f)).$$

Ist z. B. $g(u) = u^n$, so ist

$$\Phi(x^{(n)}+v\varepsilon) = (v+u_1^n)(v+u_2^n)\cdots(v+u_f^n).$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von v^{f-1} erhält man daraus nach (4.)

$$S_n = \sum_R \chi(R)\,x_R^{(n)}, \tag{6.}$$

wo S_n die Summe der n^{ten} Potenzen der f Grössen $u_1, u_2, \cdots u_f$ ist. Nach Formel (6.) § 1 kann man dafür auch schreiben

$$S_n = \sum_{R_1, R_2, \cdots R_n} \chi(R_1R_2\cdots R_n)\,x_{R_1}x_{R_2}\cdots x_{R_n}, \tag{7.}$$

wo jeder der n Summationsbuchstaben $R_1, R_2, \cdots R_n$ unabhängig von den anderen die h Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft.

Aus den Potenzsummen S_n kann man aber die Coefficienten Φ_n der Function (2.) berechnen nach der Formel

$$(-1)^n\Phi_n = \sum \frac{(-1)^{a+b+c+\cdots}\,S_1^a S_2^b S_3^c\cdots}{1^a 2^b 3^c\cdots a!\,b!\,c!\cdots}, \qquad (a+2b+3c+\cdots = n) \tag{8.}$$

wo $a, b, c, \cdots$ alle ganzen Zahlen ($\geqq 0$) durchlaufen, die der Bedingung $a+2b+3c+\cdots = n$ genügen. Diese Formel gilt auch, wenn $n > f$ ist, falls dann $\Phi_n = 0$ gesetzt wird. Mit ihrer Hülfe werden wir die Functionen $\Phi_2, \Phi_3, \cdots$ und besonders $\Phi_f = \Phi$ darstellen. Die Coefficienten von Φ sind ganze Functionen der h Constanten $\chi(R)$, deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Wählt man $n > f$, so ergeben sich aus jener Formel Relationen, denen die h Grössen $\chi(R)$ genügen müssen. Ehe ich aber zu diesen Rechnungen übergehe, muss ich eine wichtige Eigenschaft der Function $\chi(R)$ vorausschicken.

Setzt man in der Gleichung (9.) § 1 die Variabelen $y_R = 0$ ausser einer, y_A, so erhält man

$$\Phi(x_{RA^{-1}}) = \vartheta(A)\,\Phi(x_R), \tag{9.}$$

wo $\vartheta(A)$ den Coefficienten von x_A^f in $\Phi(x_R)$ bezeichnet. Setzt man aber die Variabelen $x_R = 0$ ausser einer, x_A (und ersetzt dann den Buchstaben y durch x), so erhält man

$$\Phi(x_{A^{-1}R}) = \vartheta(A)\,\Phi(x_R). \tag{10.}$$

Ersetzt man hier, falls B ein festes Element ist, für jeden Index R die Variabele x_R durch $x_{B^{-1}R}$, so findet man

$$\Phi(x_{B^{-1}A^{-1}R}) = \vartheta(A)\,\Phi(x_{B^{-1}R}) = \vartheta(A)\,\vartheta(B)\,\Phi(x_R).$$

Ersetzt man dagegen in der Gleichung (10.) A durch AB, so wird

$$\Phi(x_{B^{-1}A^{-1}R}) = \vartheta(AB)\,\Phi(x_R).$$

Mithin ist $\vartheta(AB) = \vartheta(A)\vartheta(B)$, und demnach ist $\vartheta(R)$ ein Charakter ersten Grades der Gruppe $\mathfrak{H}$, eine Einheitswurzel. Ist A ein festes Element, und setzt man für jedes R $y_R = x_{RA^{-1}}$, so ist

$$y_{P,Q} = y_{PQ^{-1}} = x_{PQ^{-1}A^{-1}} = x_{P,AQ}.$$

Wenn man aber in der Determinante $|x_{P,Q}|$ Q durch AQ ersetzt, so wird dadurch nur die Reihenfolge der h Spalten geändert. Ist m die Ordnung des Elementes A, so besteht jene Permutation der h Spalten aus lauter Cyklen der Ordnung m. Die Anzahl dieser Cyklen ist mithin $\frac{h}{m}$, und folglich ist die Permutation eine gerade oder ungerade, je nachdem $h-\frac{h}{m}$ gerade oder ungerade ist. Daher ist

$$\Theta(x_{RA^{-1}}) = (-1)^{h-\frac{h}{m}}\,\Theta(x_R),$$

also

$$\Pi(\vartheta A)^e = (-1)^{h-\frac{h}{m}}. \tag{11.}$$

Ersetzt man in der Gleichung (10.) x_R durch x_{RA}, so erhält man

$$\Phi(x_{A^{-1}RA}) = \vartheta(A)\,\Phi(x_{RA}) = \vartheta(A)\vartheta(A^{-1})\,\Phi(x_R),$$

also

$$\Phi(x_{A^{-1}RA}) = \Phi(x_R). \tag{12.}$$

Die Function $\Phi(x_R)$ bleibt also ungeändert, wenn man für jeden Index R die Variabele x_R durch $x_{A^{-1}RA}$ ersetzt, wo A ein festes Element von $\mathfrak{H}$ ist. Dabei bleibt die Variabele x_E ungeändert. Durch Vergleichung der Coefficienten von $x_E^{f-1}x_R$ ergiebt sich aber aus (12.) $\chi(ARA^{-1}) = \chi(R)$ oder, wenn man $R = BA$ setzt,

$$\chi(AB) = \chi(BA). \tag{13.}$$

Theilt man also die h Elemente von $\mathfrak{H}$ in Classen conjugirter Elemente, so hat $\chi(R)$ für alle Elemente R einer Classe denselben Werth.

Nunmehr wende ich mich zur Berechnung der Functionen Φ_n mit Hülfe der Formel (8.). Zunächst ist nach (6.)

$$\Phi_1 = S_1 = \Sigma\chi(A)x_A,$$

$$2\Phi_2 = S_1^2 - S_2 = \Sigma\left(\chi(A)\chi(B) - \chi(AB)\right)x_A x_B,$$

$$6\Phi_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 = \Sigma\big(\chi(A)\chi(B)\chi(C) - \chi(A)\chi(BC) - \chi(B)\chi(AC) - \chi(C)\chi(AB) + \chi(ABC) + \chi(ACB)\big)x_A x_B x_C.$$

Ich setze daher

$$\chi(A, B) = \chi(A)\chi(B) - \chi(AB) \tag{14.}$$
$$\chi(A, B, C) = \chi(A)\chi(B)\chi(C) - \chi(A)\chi(BC) - \chi(B)\chi(AC) - \chi(C)\chi(AB) + \chi(ABC) + \chi(ACB).$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in A, B, C, weil $\chi(ABC)$ bei cyklischer Vertauschung der Elemente A, B, C nach (13.) ungeändert bleibt. Das allgemeine Bildungsgesetz der Coefficienten der Function

$$n!\,\Phi_n(x) = \sum_{R_1, R_2, \cdots R_n} \chi(R_1, R_2, \cdots R_n)\, x_{R_1} x_{R_2} \cdots x_{R_n} \tag{15.}$$

ist etwas complicirt: Seien $A, B, C, D, F, G, H, \cdots L, M$ irgend n verschiedene oder gleiche unter den h Elementen von $\mathfrak{H}$. Man bilde die $n!$ Permutationen von n Symbolen und zerlege jede derselben in cyklische Factoren. Setzt man dann für die n Symbole die n Elemente $A, B, C, \cdots L, M$, so sei etwa

$$(ABCD)(FGH)\cdots(LM) \tag{16.}$$

eine dieser $n!$ Permutationen. Man ordne ihr das Product

$$\pm\chi(ABCD)\chi(FGH)\cdots\chi(LM) \tag{17.}$$

zu, wo das Vorzeichen + oder − zu wählen ist, je nachdem die Permutation (16.) gerade oder ungerade ist. In der Permutation (16.) bedeutet das Zeichen (FGH), dass die drei Symbole F, G, H cyklisch vertauscht werden sollen, in dem Ausdruck (17.) aber bedeutet FGH das Product der drei Elemente F, G, H.

Eine gegebene Permutation kann nur in einer Weise als Product von cyklischen Factoren dargestellt werden. Doch kann man die einzelnen Cyklen beliebig anordnen und innerhalb eines jeden Cyklus, ohne dass er seine Bedeutung ändert, die Symbole cyklisch vertauschen. Andere Umstellungen aber sind nicht zulässig. So ist die Permutation (16.) gleich

$$(GHF)\,(ML)\cdots(CDAB).$$

In dem entsprechenden Producte (17.) sind aber dieselben Änderungen gestattet, denn $\chi(ABCD)$ bleibt ungeändert, wenn man die Elemente A, B, C, D cyklisch vertauscht. Die Summe der den $n!$ Permutationen entsprechenden $n!$ Producte sei

$$\chi(A, B, C, \cdots L, M) = \Sigma^{(n)}(\pm \Pi\chi). \tag{18.}$$

Diese Function bleibt ungeändert, wenn man die n Elemente

$$A, B, C, \cdots L, M$$

beliebig unter einander vertauscht. Besteht die Permutation (16.) aus l Cyklen, so ist sie gerade oder ungerade, je nachdem $n-l$ gerade oder ungerade ist. Daher kann man auch schreiben

$$(-1)^n\chi(A, B, C, \cdots L, M) = \Sigma^{(n)}(\Pi-\chi). \tag{19.}$$

Z. B. ist, gleichgültig ob die durch A, B, C, D bezeichneten Elemente verschieden sind oder nicht,

$$\begin{aligned}\chi(A, B, C, D) = {} & \\ \chi(A)\chi(B)\chi(C)\chi(D) & -\chi(B)\chi(C)\chi(AD)-\chi(A)\chi(C)\chi(BD)-\chi(A)\chi(B)\chi(CD)\\ & -\chi(A)\chi(D)\chi(BC)-\chi(B)\chi(D)\chi(AC)-\chi(C)\chi(D)\chi(AB)\\ & +\chi(BC)\chi(AD)+\chi(AC)\chi(BD)+\chi(AB)\chi(CD)\\ & +\chi(A)\chi(BCD)+\chi(B)\chi(ACD)+\chi(C)\chi(ABD)+\chi(D)\chi(ABC)\\ & +\chi(A)\chi(BDC)+\chi(B)\chi(ADC)+\chi(C)\chi(ADB)+\chi(D)\chi(ACB)\\ & -\chi(ABCD)-\chi(ACBD)-\chi(BACD)-\chi(BCAD)-\chi(CABD)-\chi(CBAD).\end{aligned} \tag{20.}$$

Ich bilde nun die Summe

$$(-1)^n\Sigma\chi(A, B, C, \cdots L, M)\; x_A\, x_B\, x_C \cdots x_L\, x_M,$$

worin jeder der n Summationsbuchstaben $A, B, C, \cdots L, M$ unabhängig von den anderen die h Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft. Der Ausdruck $(-1)^n\chi(A, B, C, \cdots L, M)$ ist eine Summe von $n!$ Producten $\Pi(-\chi)$. Die Permutation der n Symbole, aus welcher eins dieser Producte gebildet ist, möge aus a Cyclen von 1 Symbole, b von 2 Symbolen, c von 3 Symbolen u. s. w. bestehen, so dass $a+2b+3c+\cdots = n$ ist. Multiplicirt man dann dies Product $\Pi(-\chi)$ mit $x_A\, x_B\, x_C \cdots x_L\, x_M$ und summirt, so erhält man nach (7.)

$$(-1)^{a+b+c+\cdots}\, S_1^a S_2^b S_3^c \cdots.$$

Dies Glied ergiebt sich so oft, als es Permutationen giebt, die sich in der angegebenen Art als Product von cyklischen Factoren darstellen lassen, also (Cauchy, *Comptes rendus* tom. 21, p. 604)

$$\frac{n!}{1^a 2^b 3^c \cdots a!\, b!\, c! \cdots}$$

Mal. Mithin ist die betrachtete Summe gleich

$$n!\sum \frac{(-1)^{a+b+c+\cdots}\, S_1^a S_2^b S_3^c \cdots}{1^a 2^b 3^c \cdots a!\, b!\, c! \cdots} = n!\,(-1)^n\,\Phi_n.$$

Damit ist die Formel (15.) bewiesen. Ist also $n > f$, so ist

(21.) $$\chi(R_1, R_2, \cdots R_n) = 0 \qquad (n>f).$$

In jedem der $(n+1)!$ Producte der Summe $\chi(R, R_1, R_2, \cdots R_n)$ stelle man den Factor, der das mit R bezeichnete Element enthält, an die erste Stelle, und in diesem Factor selbst stelle man mit Hülfe einer cyklischen Vertauschung R an die erste Stelle. Dann nehme man zuerst die Producte, die den Factor $\chi(R)$ enthalten, dann die, worin auf R das Element R_1 folgt, dann die, worin auf R das Element R_2 folgt u. s. w. Auf diese Weise erhält man die Recursionsformel

(22.) $$\begin{aligned}\chi(R, R_1, R_2, R_3, \cdots R_n) &= \chi(R)\chi(R_1, R_2, R_3, \cdots R_n)\\ -\chi(RR_1, R_2, R_3, \cdots R_n) - \chi(R_1, RR_2, R_3, \cdots R_n) &- \chi(R_1, R_2, RR_3, \cdots R_n)\\ &- \cdots - \chi(R_1, R_2, R_3, \cdots RR_n).\end{aligned}$$

Daraus geht hervor, dass, wenn für einen Werth von n die Grössen $\chi(R_1, R_2, \cdots R_n)$ sämmtlich verschwinden, dasselbe auch für jeden grösseren Werth von n eintreten muss. Speciell ist

(23.) $$\chi(E, R_1, R_2, \cdots R_n) = (f-n)\,\chi(R_1, R_2, \cdots R_n).$$

§ 4.

Differentiirt man die Gleichung $\Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y)$ nach y_A, so erhält man

$$\sum_R \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_R}\, x_{RA^{-1}} = \Phi(x)\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_A},$$

und wenn man $y_R = \varepsilon_R$ setzt,

(1.) $$\sum_R \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_R}\, x_{RA^{-1}} = \chi(A)\,\Phi(x).$$

Differentiirt man aber jene Gleichung nach x_A, so findet man auf demselben Wege

(2.) $$\sum_R \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_R}\, x_{A^{-1}R} = \chi(A)\,\Phi(x).$$

In diesen Gleichungen ersetze ich x_E durch $x_E - u$. Dann ergiebt sich daraus, da

$$\frac{\partial l\Phi(x-u\varepsilon)}{\partial u} = \frac{1}{u-u_1} + \cdots + \frac{1}{u-u_f} = \sum_n{}_0^\infty \frac{S_n}{u^{n+1}}$$

ist, die Recursionsformel

(3.) $$\frac{1}{n+1}\frac{\partial S_{n+1}}{\partial x_A} = \frac{1}{n}\sum_R \frac{\partial S_n}{\partial x_R}\, x_{RA^{-1}} = \frac{1}{n}\sum_R \frac{\partial S_n}{\partial x_R}\, x_{A^{-1}R}, \qquad (n>0)$$

aus der sich ein neuer Beweis für die Formel (7.) § 3 ableiten lässt. Differentiirt man die Gleichung (1.) nach x_S, multiplicirt sie dann mit $x_{SB^{-1}}$ und summirt nach S, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{R,S} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_R \partial x_S} x_{RA^{-1}} x_{SB^{-1}} = \big(\chi(A)\chi(B) - \chi(BA)\big)\,\Phi,$$

aus der sich direct die Formel (13.) § 3 ergiebt. Ebenso ist allgemein, wenn $A, B, \cdots M$ irgend n Elemente von $\mathfrak{H}$ sind,

$$\sum_{R,S,\cdots V} \frac{\partial^n \Phi}{\partial x_R \partial x_S \cdots \partial x_V} x_{RA^{-1}} x_{SB^{-1}} \cdots x_{VM^{-1}} = \chi(A, B, \cdots M)\,\Phi$$

Hier mache ich von jenen Relationen eine andere Anwendung. Setzt man

$$y_{R^{-1}} = \frac{\partial \Phi(x - u\varepsilon)}{\partial x_R},$$

so lauten sie

$$\sum_R y_{PR^{-1}}(x_{RQ^{-1}} - u\varepsilon_{RQ^{-1}}) = \sum_R (x_{PR^{-1}} - u\varepsilon_{PR^{-1}})\, y_{RQ^{-1}} = \chi(QP^{-1})\,\Phi(x - u\varepsilon).$$

Ich setze noch $\chi(R^{-1}) = \chi'(R)$ und bezeichne die Matrix $(\chi'(PQ^{-1}))$ kurz mit (χ'). Dann drückt diese Formel die folgende Beziehung zwischen Matrizen aus

$$(4.)\qquad (y)\big((x) - u(\varepsilon)\big) = \big((x) - u(\varepsilon)\big)(y) = (\chi')\,\Phi(x - u\varepsilon).$$

Mithin ist $(y)(x) = (x)(y)$. Ist also, nach Potenzen von u entwickelt, $(y) = (p) + (q)u + (r)u^2 + \cdots$, so ist (x) mit jeder der Matrizen $(p), (q), (r), \cdots$ vertauschbar. Entwickelt man nun in der Relation (4.) auch $\Phi(x - u\varepsilon)$ nach Potenzen von u, so müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von u auf beiden Seiten übereinstimmen. Die so erhaltenen Gleichungen füge man wieder zusammen, nachdem man sie, statt mit den Potenzen der Variabelen u, mit den entsprechenden Potenzen der Matrix (x) multiplicirt hat. Dies Verfahren führt zu demselben Resultate, wie wenn man direct in der Gleichung (4.) die Variabele u durch die Matrix (x) ersetzt. (Ausführlicher ist diese Schlussweise entwickelt $V.$, S. 605.) Dann ergiebt sich $(\chi')\Phi(x - (x)\varepsilon) = 0$ oder deutlicher $(\chi')\Phi(x_E - (x), x_A, x_B, x_C, \cdots) = 0$ und noch ausführlicher nach (2.) § 3

$$(5.)\qquad (\chi')\big((x)^f - (x)^{f-1}\Phi_1 + (x)^{f-2}\Phi_2 - \cdots + (-1)^f (x)^0 \Phi_f\big) = 0.$$

Multiplicirt man noch mit $(x)^{n-f}$, so erhält man

$$(6.)\qquad \sum_R \chi(AR)\big(x_R^{(n)} - x_R^{(n-1)}\Phi_1 + x_R^{(n-2)}\Phi_2 - \cdots + (-1)^f x_R^{(n-f)}\Phi_f\big) = 0.$$

Setzt man $n = f$, und bestimmt man den Coefficienten von x_S^f, so findet man

$$(7.)\qquad \chi(AS^f) - \mathfrak{s}_1(S)\chi(AS^{f-1}) + \mathfrak{s}_2(S)\chi(AS^{f-2}) - \cdots + (-1)^f \mathfrak{s}_f(S)\chi(A) = 0,$$

wo

(8.) $$\vartheta_n(S) = \frac{1}{n!}\chi(S, S, \cdots S)$$

der Coefficient von x_S^n in Φ_n ist, also von A unabhängig ist. Speciell ist $\vartheta_1(S) = \chi(S)$ und $\vartheta_f(S) = \vartheta(S)$. Setzt man in der Function $\Phi(x_E + u, x_A, x_B, \cdots x_S, \cdots)$ alle Variabelen gleich Null ausser u und x_S, so wird

(9.) $$\Phi(u, 0, 0, \cdots x_S, 0, \cdots) = u^f + \vartheta_1(S)u^{f-1}x_S + \vartheta_2(S)u^{f-2}x_S^2 + \cdots + \vartheta_f(S)x_S^f.$$

Daher ist $\vartheta_n(E) = \binom{f}{n}$.

§ 5.

Die bisherigen Ergebnisse habe ich allein aus der Relation (9.) § 1 abgeleitet, ohne dabei die Unzerlegbarkeit von Φ und den Exponenten e der Potenz von Φ zu benutzen, durch welche die Gruppendeterminante Θ theilbar ist. Jede der h Variabelen x_R kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte von Θ einmal vor, im Ganzen also an h Stellen. An jeder dieser h Stellen ist ihr aber dieselbe Unterdeterminante complementär, wie ich *Ch.* § 6 gezeigt habe. Ist also $\Theta_{P,Q}$ die Unterdeterminante, die dem Elemente $x_{P,Q}$ in der Determinante $\Theta = |x_{P,Q}|$ complementär ist, so ist

(1.) $$\Theta_{P,Q} = \frac{1}{h}\frac{\partial\Theta}{\partial x_{PQ^{-1}}} = \Theta_{PQ^{-1}},$$

falls man $h\Theta_R = \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_R}$ setzt. Die Unterdeterminanten von Θ bilden demnach eine Matrix, welche dieselben Symmetrieeigenschaften hat, wie die Matrix (x). Nach den bekannten Relationen zwischen den Elementen einer Determinante und den ihnen complementären Unterdeterminanten ist

$$\sum_R x_{P,R}\Theta_{Q,R} = \sum_R x_{R,P}\Theta_{R,Q} = \varepsilon_{P,Q}\Theta$$

oder

(2.) $$\sum_R x_{AR}\frac{\partial\Theta}{\partial x_R} = \sum_R x_{RA}\frac{\partial\Theta}{\partial x_R} = \varepsilon_A h\Theta.$$

Nach (7.) § 1 ist $\Theta = \Phi^e\Psi$, wo Ψ zu Φ theilerfremd ist. Mithin ist

$$\sum_R x_{AR}\left(e\frac{\partial l\Phi}{\partial x_R} + \frac{\partial l\Psi}{\partial x_R}\right) = \varepsilon_A h$$

oder

$$\sum_R x_{AR}\left(e\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_R} + \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x_R}\right) = \varepsilon_A h\Phi\Psi.$$

Da Ψ zu Φ theilerfremd ist, so ist folglich $\sum x_{AR}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_R}$ durch Φ theilbar, und weil beide Functionen von demselben Grade sind, so können sie sich nur um einen constanten Factor unterscheiden. Dieser ergiebt sich durch die Vergleichung der Coefficienten von x_E^f, und mithin besteht die Formel

$$\sum_R x_{AR} \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} = \sum_R x_{RA} \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} = \chi(A^{-1}) \Phi, \tag{3.}$$

die auf einem anderen Wege schon in § 4 abgeleitet ist. Multiplicirt man die Gleichung

$$\sum_S x_{RS} \frac{\partial \Phi}{\partial x_S} = \chi(R^{-1}) \Phi$$

mit Θ_{RA} und summirt nach R, so erhält man

$$h\Theta \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \Phi \sum \chi(R^{-1}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_{RA}} = \Phi \sum \chi(AR^{-1}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_R}.$$

Setzt man hier $\Theta = \Phi^e \Psi$, so erhält man

$$h\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \sum \chi(AR^{-1}) \left(e\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x_R} \right),$$

und folglich ist

$$\frac{h}{e} \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \sum_R \chi(AR^{-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_R}, \tag{4.}$$

weil die Differenz dieser beiden Functionen durch Φ theilbar und nur vom Grade $f-1$ ist. Setzt man aber $\Theta = \Phi'^{e'} \Psi'$, wo Φ' ein von Φ verschiedener Primfactor von Θ ist, so erhält man

$$h\Phi' \Psi' \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \Phi \sum \chi(AR^{-1}) \left(e'\Psi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x_R} + \Phi' \frac{\partial \Psi'}{\partial x_R} \right),$$

und folglich ist

$$\sum \chi(AR^{-1}) \frac{\partial \Phi'}{\partial x_R} = 0, \tag{5.}$$

weil diese Function durch Φ' theilbar ist. Vergleicht man in diesen Relationen die Coefficienten von x_E^{f-1} (bez. $x_E^{f'-1}$), so ergiebt sich

$$\sum \chi(AR^{-1}) \chi(R) = \frac{h}{e} \chi(A), \qquad \sum \chi(AR^{-1}) \psi(R) = 0,$$

wo $\psi(R)$ der der Primfunction Φ' entsprechende Charakter ist. Man kann diese Gleichungen auch schreiben

$$\sum \chi(R) \chi(S) = \frac{h}{e} \chi(A), \qquad \sum \chi(R) \psi(S) = 0 \qquad (RS = A) \tag{6.}$$

oder

$$\sum_R \chi(PR^{-1}) \chi(RQ^{-1}) = \frac{h}{e} \chi(PQ^{-1}), \qquad \sum_R \chi(PR^{-1}) \psi(RQ^{-1}) = 0. \tag{7.}$$

Für $A = E$ ist

(8.) $$\sum_R \chi(R)\chi(R^{-1}) = \frac{hf}{e}, \quad \sum_R \chi(R)\psi(R^{-1}) = 0.$$

Daraus fliesst die Folgerung, dass die Werthe $\chi(E)$, $\chi(A)$, $\chi(B)$, $\cdots$ des Charakters χ den entsprechenden Werthen $\psi(E)$, $\psi(A)$, $\psi(B)\cdots$ des Charakters ψ nicht proportional sein können. Bezeichnet man die Matrix $(\chi(PQ^{-1}))$ kurz mit (χ), so kann man die Relationen (7.) auch auf die Form

(9.) $$(\frac{e}{h}\chi)^2 = (\frac{e}{h}\chi), \quad (\chi)(\psi) = 0$$

bringen.

§ 6.

Gleichzeitig mit P durchläuft auch P^{-1} die h Elemente von $\mathfrak{H}$, nur in einer anderen Reihenfolge. Daher ist

$$|x_{P,Q}| = |x_{P^{-1},Q^{-1}}| = |x_{Q^{-1},P^{-1}}|,$$

also

(1.) $$|x_{PQ^{-1}}| = |x_{Q^{-1}P}|.$$

In jeder dieser beiden Determinanten erhält man die Zeilen, indem man für P, die Spalten, indem man für Q die Elemente $G_1, G_2, \cdots G_h$ von $\mathfrak{H}$ setzt. Sind also x_R und y_R zwei Systeme von je h Variabelen, so ist

$$|x_{PQ^{-1}}| = \Pi(\Phi(x)^e), \qquad |y_{Q^{-1}P}| = \Pi(\Phi(y)^e).$$

Die beiden Matrizen $(x_{PQ^{-1}})$ und $(y_{Q^{-1}P})$ sind aber mit einander vertauschbar, es ist

$$\sum_R x_{PR^{-1}}\, y_{Q^{-1}R} = \sum_S y_{S^{-1}P}\, x_{SQ^{-1}}.$$

Denn setzt man $SQ^{-1} = PR^{-1}$, also $S = PR^{-1}Q$, so durchläuft S gleichzeitig mit R die h Elemente von $\mathfrak{H}$, und es ist auch $S^{-1}P = Q^{-1}R$. Seien $a_1, a_2, a_3, \cdots$ die h Wurzeln der (charakteristischen Gleichung der) Matrix $(x_{PQ^{-1}})$, also die Wurzeln der Gleichung $|x_{PQ^{-1}} - u\varepsilon_{PQ^{-1}}| = 0$, und $b_1, b_2, b_3, \cdots$ die h Wurzeln der Gleichung $|y_{Q^{-1}P} - u\varepsilon_{PQ^{-1}}| = 0$, also auch der Gleichung $|y_{PQ^{-1}} - u\varepsilon_{PQ^{-1}}| = 0$. Dann lassen sich (V., S. 602, III) diese beiden Reihen von je h Wurzeln einander so zuordnen, dass $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3, \cdots$ die Wurzeln der Matrix $(x_{PQ^{-1}} + y_{Q^{-1}P})$ werden.

Auf diesen allgemeinen Satz komme ich später (§ 10) zurück. Hier mache ich jetzt die Voraussetzung, dass für je zwei Elemente von $\mathfrak{H}$

(2.) $$y_{BA} = y_{AB}$$

ist. Theilt man also die h Elemente von $\mathfrak{H}$ in Classen conjugirter

Elemente, so hat y_R für alle Elemente einer Classe denselben Werth, etwa für die Elemente R der ρ^{ten} Classe den Werth $y_R = y_\varrho$. Ist k die Anzahl der Classen, so seien die k Variabelen $y_0, y_1, \cdots y_{k-1}$, die den k Classen $(0), (1), \cdots (k-1)$ entsprechen, von einander unabhängig. Da nun $y_{Q^{-1}P} = y_{PQ^{-1}}$ ist, so ist die Matrix $(y_{PQ^{-1}})$ mit der Matrix $(x_{PQ^{-1}})$ vertauschbar. Jede Matrix (x), welche die in § 1 definirten Symmetrieeigenschaften besitzt, ist mit jeder anderen Matrix (y) vertauschbar, deren Elemente ausserdem noch den Bedingungen (2.) genügen. Sind daher u, v, w Variabele, so ist die Determinante

$$\left|ux_{PQ^{-1}} + vy_{PQ^{-1}} + w\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = \Pi(\Phi(ux+vy+w\varepsilon)^e)$$

ein Product von linearen Functionen von u, v, w, und mithin ist auch

$$(3.)\qquad \Phi(ux+vy+w\varepsilon) = (u_1u+v_1v+w)(u_2u+v_2v+w)\cdots(u_fu+v_fv+w),$$

wo $u_1, v_1, \cdots u_f, v_f$ von u, v, w unabhängig sind. Den Coefficienten von w kann man in jeder dieser f linearen Functionen gleich 1 voraussetzen, weil die linke Seite für $u = v = 0$ gleich w^f wird. Setzt man $v = 0$ und $u = 1$, so erhält man

$$(4.)\qquad \Phi(x+w\varepsilon) = (u_1+w)(u_2+w)\cdots(u_f+w),$$

setzt man $u = 0$ und $v = 1$,

$$(5.)\qquad \Phi(y+w\varepsilon) = (v_1+w)(v_2+w)\cdots(v_f+w).$$

Daher hängen $u_1, u_2, \cdots u_f$ nur von den h Variabelen x_R ab und haben dieselbe Bedeutung wie in § 3, während $v_1, v_2, \cdots v_f$ nur von den k Variabelen y_ϱ abhängen.

Da $\Phi(x)$ unzerlegbar ist, so ist auch $\Phi(x+w\varepsilon)$ als Function von w irreducibel, d. h. dieser Ausdruck kann nicht als Product zweier ganzen Functionen von w dargestellt werden, deren Coefficienten rationale Functionen der k unabhängigen Variabelen x_R sind. Betrachtet man die k Grössen y_ϱ als constant, so ist auch v_1 eine Constante, und mithin ist auch

$$\Phi(x_E+v_1+w, x_A, x_B, \cdots) = (u_1+v_1+w)(u_2+v_1+w)\cdots(u_f+v_1+w)$$

als Function von w irreducibel. Diese Function hat aber mit der Function

$$\Phi(x+y+w) = (u_1+v_1+w)(u_2+v_2+w)\cdots(u_f+v_f+w)$$

den linearen Factor u_1+v_1+w gemeinsam. Folglich müssen beide Functionen identisch sein. Setzt man $w = 0$ und $v_1 = \eta$, so ist also

$$(6.)\qquad \Phi(x_E+y_E, x_A+y_A, x_B+y_B, \cdots) = \Phi(x_E+\eta, x_A, x_B, \cdots),$$

wo η nur von den Variabelen y_R abhängt. Setzt man die Variabelen x_R alle gleich Null ausser $x_E = u$, so erhält man

$$\Phi(y_E + u, y_A, y_B, \cdots) = (u+\eta)^f, \qquad (y_{BA} = y_{AB}) \tag{7.}$$

und daraus durch Vergleichung der Coefficienten von u^{f-1}

$$f\eta = \Sigma\, \chi(R)\, y_R. \tag{8.}$$

So ergiebt sich der Satz:

Ist für je zwei Elemente A und B der Gruppe $\mathfrak{H}$ $x_{BA} = x_{AB}$, so wird die Primfunction f^{ten} Grades $\Phi(x)$ gleich der f^{ten} Potenz einer linearen Function $\xi = \frac{1}{f}\Sigma\, \chi(R)\, x_R$.

Für alle Elemente R der ρ^{ten} Classe, deren Anzahl $h_R = h_\rho$ sei, hat $\chi(R)$ denselben Werth χ_ρ. Ist $x_{BA} = x_{AB}$, so hat auch x_R für diese h_ρ Elemente denselben Werth x_ρ. Daher ist $\Sigma\, \chi(R)\, x_R = \Sigma\, h_\rho \chi_\rho x_\rho$. Ist Φ' ein von Φ verschiedener Primfactor von Θ, und $\psi(R)$ der ihm entsprechende Charakter, so können nach § 5 die k Grössen ψ_ρ den k Grössen χ_ρ nicht proportional sein, und mithin können die beiden linearen Functionen $\Sigma\, h_\rho \psi_\rho x_\rho$ und $\Sigma\, h_\rho \chi_\rho x_\rho$ sich nicht etwa nur um einen constanten Factor unterscheiden. Wendet man nun den obigen Satz auf jeden Primfactor von Θ an, so erhält man

$$|x_{PQ^{-1}}| = \Pi\left(\frac{1}{f}\sum_R \chi(R) x_R\right)^{ef} = \Pi(\xi^{ef}). \qquad (x_{BA} = x_{AB}) \tag{9.}$$

Jedem Primfactor Φ der Determinante (7.) § 1, worin die h Variabelen x_R von einander unabhängig sind, entspricht ein Linearfactor ξ der Determinante (9.), worin $x_{BA} = x_{AB}$ gesetzt ist. Sind die k Variabelen x_ρ unabhängig, so entsprechen zwei verschiedenen Primfactoren jener Determinante zwei wesentlich verschiedene Linearfactoren der Determinante (9.). Ist f der Grad der Primfunction Φ, und e der Exponent der in Θ aufgehenden Potenz von Φ, so ist $g = ef$ der Exponent der Potenz des entsprechenden Linearfactors ξ, wodurch die Determinante (9.) theilbar ist.

Vergleicht man das erhaltene Resultat mit der Formel (22.), *Ch.* § 5, so erkennt man, dass die Grössen χ_ρ, welche dort auf einem ganz anderen Wege als die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{H}$ eingeführt sind, mit den hier definirten Grössen $\chi(R)$ völlig übereinstimmen, und ebenso die Zahlen $g = ef$. Nur waren dort die beiden Factoren e und f von g willkürlich gelassen, während sie hier einzeln eine bestimmte Bedeutung haben. Man könnte daher jetzt von allen dort entwickelten Eigenschaften der Charaktere Gebrauch machen. Indessen ziehe ich es vor, die Ergebnisse jener Arbeit von dem hier gewählten Ausgangspunkt aus noch einmal abzuleiten.

§ 7.

Wenn man die Gleichung (6.) § 6 nach y_ϱ differentiirt und dann die k Variabelen y_κ alle gleich Null setzt, so findet man

$$\sum_{(\varrho)}' \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_R} = \frac{h_\varrho \chi_\varrho}{f} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_E},$$

wo der Summationsbuchstabe R die h_ϱ Elemente der ρ^{ten} Classe durchläuft. Ist A ein festes Element, und ersetzt man für jedes R die Variabele x_R durch x_{AR}, so ändert sich Φ nach (10.) § 3 nur um einen constanten, von Null verschiedenen Factor. Mithin ist auch

$$\sum_{(\varrho)}' \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_{AR}} = \frac{h_\varrho \chi_\varrho}{f} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_A}, \tag{1.}$$

wo wieder R die h_ϱ Elemente der Classe (ρ) durchläuft. Vergleicht man die Coefficienten von x_E^{f-1}, so erhält man

$$\Sigma' \chi(AS) = \frac{h_B}{f} \chi(A)\chi(B), \tag{2.}$$

wo S die h_B mit B conjugirten Elemente durchläuft. Direct erhält man diese Relation, indem man für die Function (7.) § 6 den Ausdruck $S_2(y) = \Sigma \chi(PQ) y_P y_Q = f\eta^2$ berechnet. Setzt man $S = R^{-1}BR$ und für R alle h Elemente von $\mathfrak{H}$, so wird S jedem Elemente der Classe von B gleich und zwar jedem $\frac{h}{h_B}$ Mal. Daher ist (*Ch.* § 5, (5.))

$$h\chi(A)\chi(B) = f \sum_R \chi(AR^{-1}BR). \tag{3.}$$

Zu demselben Resultate gelangt man direct von der Formel (9.) § 6 aus auf dem *Ch.* S. 1001 angegebenen Wege, also mittelst derselben Schlüsse, die in § 1 zu der Formel (9.) geführt haben.

Die Anzahl der verschiedenen Primfactoren der Gruppendeterminante Θ sei l. Diese l Functionen Φ und die ihnen entsprechenden Charaktere χ mögen durch obere Indices $\lambda = 0, 1, \cdots l-1$ von einander unterschieden werden. Nun ist in der Entwicklung der Determinante $\Theta(x + u\varepsilon)$ nach Potenzen von u der Coefficient von u^{h-1} gleich hx_E. Ersetzt man daher in dem Producte

$$\Theta = \prod_\lambda \left(\Phi^{(\lambda)e^{(\lambda)}}\right) \tag{4.}$$

x_E durch $x_E + u$ und vergleicht dann die Coefficienten von x_E^{h-1}, so erhält man

$$\sum_\lambda e^{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(R) = h\varepsilon_R. \tag{5.}$$

Nun ist nach (8.) § 5 und (3.)

$$\sum_R \chi(S^{-1}R^{-1}SR) = \frac{h}{f}\chi(S)\chi(S^{-1}), \qquad \sum_S \chi(S)\chi(S^{-1}) = \frac{hf}{e},$$

und mithin für jeden Werth von λ

$$\sum_{R,S} \frac{e^{(\lambda)}}{h} \chi^{(\lambda)}(S^{-1} R^{-1} SR) = h,$$

und folglich, da dieser Werth von λ unabhängig ist,

$$\sum_{\lambda} \sum_{R,S} \frac{e^{(\lambda)}}{h} \chi^{(\lambda)}(S^{-1} R^{-1} SR) = hl.$$

Jetzt kehre ich die Reihenfolge der beiden Summationen um. Dann ist nach (5.)

$$\sum_{\lambda} \frac{e^{(\lambda)}}{h} \chi^{(\lambda)}(S^{-1} R^{-1} SR) = 0,$$

ausser wenn $S^{-1}R^{-1}SR = E$, also $SR = RS$ ist; dann ist die Summe gleich 1. Daher ist hl gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung $SR = RS$. Diese aber ist, wie ich *Ch.* S. 987 durch die einfachsten Betrachtungen gezeigt habe, gleich hk, und folglich ist $l = k$.

Die Anzahl der verschiedenen Primfactoren der Gruppendeterminante ist gleich der Anzahl der Classen conjugirter Elemente, worin die Elemente der Gruppe zerfallen.

Durchläuft R die Classe (α), so durchläuft R^{-1} die inverse Classe, die ich mit (α') bezeichne. Daher sind die Gleichungen (8.) § 5 identisch mit

$$(6.) \qquad \sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)} = \frac{h f^{(\varkappa)}}{e^{(\varkappa)}}, \qquad \sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\lambda)} = 0.$$

Demnach sind die beiden Matrizen des k^{ten} Grades

$$(7.) \qquad \left(\frac{h_\alpha}{h} \chi_\alpha^{(\varkappa)}\right), \qquad \left(\frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)}\right)$$

complementär und folglich bestehen auch die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)} = \frac{h}{h_\alpha}, \qquad \sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\beta'}^{(\varkappa)} = 0.$$

Setzt man also $h_{\alpha\beta} = h_\alpha$ oder 0, je nachdem $(\beta) = (\alpha')$ ist oder nicht, so ist

$$(8.) \qquad \sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)} = \frac{h\, h_{\alpha\beta}}{h_\alpha h_\beta}.$$

Diese Gleichung erhält man unmittelbar aus der Relation (2.). Ist nämlich $\chi(A) = \chi_\alpha$ und $\chi(B) = \chi_\beta$, so lautet diese

$$\sum_{S}{}' \chi^{(\varkappa)}(AS) = \frac{h_\beta}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)},$$

wo S die h_β Elemente der β^{ten} Classe durchläuft. Daher ist

$$\sum_{\varkappa} \sum_{S}{}' \frac{e^{(\varkappa)}}{h} \chi^{(\varkappa)}(AS) = \frac{h_\beta}{h} \sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)}.$$

Nun ist aber $\sum\limits_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{h} \chi^{(\varkappa)}(AS) = 0$, ausser wenn $AS = E$, also $S = A^{-1}$ ist. Dann ist die Summe gleich 1. Das letztere tritt aber stets und nur dann ein, wenn $(\beta) = (\alpha')$ ist, und so ergiebt sich die Gleichung (8). Sowohl aus dieser wie aus (6.) folgt, dass die Determinante k^{ten} Grades

$$|\chi_\alpha^{(\varkappa)}| \tag{9.}$$

von Null verschieden ist.

Sei allgemeiner A ein bestimmtes Element der α^{ten} Classe und R ein veränderliches Element, das die h_α mit A conjugirten Elemente durchläuft. Dieselbe Bedeutung mögen für die β^{te} Classe die Zeichen B und S, für die γ^{te} die Zeichen C und T haben. Dann ist nach (2.)

$$\sum_R{}' \chi(RSC) = \frac{h_\alpha}{f}\chi(A)\chi(SC), \qquad \sum_S{}' \chi(SC) = \frac{h_\beta}{f}\chi(B)\chi(C),$$

also

$$\sum_{R,S}{}' \chi(RSC) = \frac{h_\alpha h_\beta}{f^2}\chi_\alpha\chi_\beta\chi_\gamma$$

und mithin

$$\sum_{\varkappa}\sum_{R,S}{}' \frac{e^{(\varkappa)}}{h}\chi^{(\varkappa)}(RSC) = \frac{h_\alpha h_\beta}{h}\sum_{\varkappa}\frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)^2}}\chi_\alpha^{(\varkappa)}\chi_\beta^{(\varkappa)}\chi_\gamma^{(\varkappa)}.$$

Die linke Seite ist gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung $RSC = E$. Die rechte Seite zeigt, dass diese Anzahl nicht von dem Elemente C, sondern nur von der Classe (γ) abhängt, der C angehört. Bezeichnet man sie mit $\frac{h_{\alpha\beta\gamma}}{h_\gamma}$, so ist demnach

$$\frac{h\,h_{\alpha\beta\gamma}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} = \sum_{\varkappa}\frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)^2}}\chi_\alpha^{(\varkappa)}\chi_\beta^{(\varkappa)}\chi_\gamma^{(\varkappa)}. \tag{10.}$$

Setzt man für C der Reihe nach die h_γ Elemente T der Classe (γ), so ist folglich $h_{\alpha\beta\gamma}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $RST = E$, falls R die h_R Elemente der Classe (α) durchläuft, S die h_β der Classe (β) und T die h_γ der Classe (γ). Wie die rechte Seite dieser Gleichung zeigt, bleibt die Zahl $h_{\alpha\beta\gamma}$ bei jeder Vertauschung ihrer drei Indices unter einander ungeändert. Daher ist auch $\frac{h_{\alpha\beta\gamma}}{h_\beta}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $RBT = E$, worin an Stelle von S ein festes Element B der β^{ten} Classe getreten ist.

Aus (6.) und (10.) ergeben sich die Relationen

$$h_\beta h_\gamma \chi_\beta^{(\varkappa)}\chi_\gamma^{(\varkappa)} = f^{(\varkappa)}\sum_\alpha h_{\alpha\beta\gamma}\chi_{\alpha'}^{(\varkappa)}.$$

Diese zeigen, dass die Grössen χ_α den Gleichungen

$$h_\beta h_\gamma \chi_\beta \chi_\gamma = f\sum_\alpha h_{\alpha'\beta\gamma}\chi_\alpha \tag{11.}$$

genügen. Dieselben haben daher k Systeme von Lösungen

$$\chi_\alpha = \chi_\alpha^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots k-1)$$

aber nicht mehr. Denn sind $x_0, x_1, \cdots x_{k-1}$ Variabele und setzt man

$$(12.) \qquad \sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} x_\alpha = f^{(\varkappa)} \xi^{(\varkappa)},$$

so folgt aus (11.)

$$h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \xi^{(\varkappa)} = \sum_\beta (\sum_\gamma h_{\alpha\beta'\gamma}\, x_\gamma)\, \chi_\beta^{(\varkappa)}$$

oder

$$\sum_\beta ((\sum_\gamma h_{\alpha\beta'\gamma} x_\gamma) - h_{\alpha\beta'} \xi^{(\varkappa)})\, \chi_\beta^{(\varkappa)} = 0.$$

Folglich verschwindet die Determinante

$$(13.) \qquad |(\sum_\gamma h_{\alpha\beta'\gamma} x_\gamma) - h_{\alpha\beta'} r|, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots k-1)$$

die eine ganze Function k^{ten} Grades von r ist, für die k Werthe $r = \xi^{(\varkappa)}$, die unter einander verschieden sind (vergl. DEDEKIND, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.* Göttinger Nachrichten 1885, S. 146).

Die Gleichungen (11.) bestimmen die Grössen $\frac{\chi_\alpha}{f}$. Alsdann liefert die Gleichung (6.)

$$\frac{h}{ef} = \sum h_\alpha \frac{\chi_\alpha}{f} \frac{\chi_{\alpha'}}{f}$$

zu jedem der k Werthsysteme $\frac{\chi_\alpha}{f}$ den entsprechenden Werth von $ef = g$. Nach § 3 ist demnach zur vollständigen Berechnung der k Primfunctionen Φ weiter nichts mehr erforderlich, als die positiven ganzen Zahlen e und f, deren Product g bereits bekannt ist, einzeln zu bestimmen. Diese Aufgabe, von allen die Gruppendeterminante betreffenden Fragen die schwierigste, wird in § 9 durch den Satz gelöst, dass stets $e = f = \sqrt{g}$ ist. Nimmt man dazu aus § 12 das Resultat, dass χ_α und $\chi_{\alpha'}$ conjugirte complexe Grössen sind, so folgt aus (7.), dass die Matrix

$$(14.) \qquad \left(\sqrt{\frac{h_\alpha}{h}}\, \chi_\alpha^{(\varkappa)}\right)$$

der conjugirten complexen Matrix complementär ist.

§ 8.

In der Gleichung (7.) § 6 gebe ich den Variabelen y_R die Werthe $\chi(R^{-1}) = \chi'(R)$, die der Bedingung $y_{BA} = y_{AB}$ nach (13.) § 3 genügen. Dann ist nach (8.) § 5 $\eta = \frac{h}{e}$, und mithin ist

$$(1.) \qquad \Phi(\frac{e}{h}\chi') = 1.$$

In Folge der Eigenschaft (13.) § 3 ist die Matrix (χ') mit jeder Matrix (x) vertauschbar. Ich setze

$$\frac{h}{e}\,\xi_A = \Sigma\,\chi(R^{-1})\,x_S = \Sigma\,\chi(S^{-1})\,x_R\,, \qquad (RS = A) \tag{2.}$$

und bilde aus den Grössen $\xi_{PQ^{-1}}$ die Matrix (ξ). Dann ist

$$((x) + u(\varepsilon))\,(\frac{e}{h}\chi') = (\xi) + u(\frac{e}{h}\chi')$$

und mithin nach (9.) § 1

$$\Phi(x + u\varepsilon) = \Phi(\xi + u\frac{e}{h}\chi').$$

Nach Gleichung (6.) § 6 ist aber

$$\Phi(\xi + u\frac{e}{h}\chi') = \Phi(\xi + u\varepsilon),$$

weil der den Grössen $y_R = \frac{e}{h}\chi'(R)$ entsprechende Werth von η nach (8.) § 5 gleich 1 ist. Folglich ist

$$\Phi(x + u\varepsilon) = \Phi(\xi + u\varepsilon). \tag{3.}$$

Ist dagegen Φ' ein von Φ verschiedener Primfactor der Gruppendeterminante, f' sein Grad und ψ der entsprechende Charakter, so ist nach (7.) § 6

$$\Phi'(y_R + u\varepsilon_R) = (u + \eta')^{f'}, \qquad (y_{BA} = y_{AB})$$

wo $f'\eta' = \Sigma\,\psi(R)\,y_R$ ist. Setzt man also $y_R = \frac{e}{h}\chi'(R)$, so ist nach (8.) § 5 $\eta' = 0$. Demnach ist nach (6.) § 6 für h unabhängige Variabele z_R

$$\Phi'(uz + \frac{e}{h}\chi') = \Phi'(uz) = u^{f'}\,\Phi'(z).$$

Sei $(z) = (x)^{-1}$, also $(z)\,(x) = (\varepsilon)$ und $\Phi(z)\Phi(x) = 1$. Dann ist

$$\Phi'(x)\;\Phi'\Big(uz + \frac{e}{h}\chi'\Big) = u^{f'},$$

und daher, weil $(x)\,(u(z) + (\frac{e}{h}\chi')) = u(\varepsilon) + (\xi)$ ist,

$$\Phi'(\xi + u\varepsilon) = u^{f'}. \tag{4.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen, die nur specielle Fälle einer allgemeineren Formel sind, ergiebt sich nach (7.) § 1

$$\left|\xi_{PQ^{-1}} + u\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = \Phi(x + u\varepsilon)^e\; u^{h-ef} \tag{5.}$$

und für $x_R = \varepsilon_R$

$$\left|\frac{e}{h}\chi(PQ^{-1}) + u\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = (u + 1)^{ef}\; u^{h-ef}. \tag{6.}$$

Daher verschwindet die charakteristische Determinante der Matrix (ξ) für die $f+1$ Werthe $u = 0, u_1, u_2, \cdots u_f$. Weil nämlich die Gruppendeterminante $\Theta(x)$ stets den linearen Factor $\Sigma\, x_R$, und zwar nur in der ersten Potenz, enthält, so ist nothwendig $h-ef>0$, falls man den trivialen Fall $h=1$ ausschliesst.

Nun sei $G((\xi)) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der die Matrix (ξ) genügt (*V.* § 1, VI). Dann muss die ganze Function $G(u)$, die ein Theiler der charakteristischen Determinante $|\xi_{PQ^{-1}} - u\,\varepsilon_{PQ^{-1}}|$ ist, für jede Wurzel der Matrix (ξ), also für jeden der $f+1$ Werthe $u = 0, u_1, u_2, \cdots u_f$ verschwinden und mithin durch $u\Phi(x-u\varepsilon)$ theilbar sein. Da ferner die Matrix (χ') mit jeder Matrix (x) vertauschbar ist, so ist nach (9.) § 5

$$(7.)\qquad (\xi)^n = \left((\tfrac{e}{h}\chi')(x)\right)^n = (\tfrac{e}{h}\chi')^n(x)^n = (\tfrac{e}{h}\chi')(x)^n.$$

Multiplicirt man daher die Relation (5.) § 4 mit (x), so erhält man

$$(8.)\qquad (\xi)^{f+1} - (\xi)^f\,\Phi_1 + (\xi)^{f-1}\,\Phi_2 - \cdots + (-1)^f(\xi)\,\Phi_f = 0,$$

wo nach (3.)

$$(9.)\qquad \Phi_n = \Phi_n(x) = \Phi_n(\xi)$$

ist, oder kürzer

$$(\xi)\,\Phi(x-(\xi)\varepsilon) = 0.$$

Mithin ist $u\Phi(x-u\varepsilon)$ durch $G(u)$ theilbar, also gleich $G(u)$, und folglich ist (8.) die Gleichung niedrigsten Grades, der die Matrix (ξ) genügt.

Ohne die Relation (5.) § 4 zu benutzen, kann man diesen Satz auch so einsehen: Die Function $G(u)$ wird erhalten, indem man die Determinante h^{ten} Grades $(\xi_{PQ^{-1}} - u\,\varepsilon_{PQ^{-1}})$ durch den grössten gemeinsamen Divisor ihrer Unterdeterminanten $(h-1)^{\text{ten}}$ Grades dividirt. Sind die h Variabelen x_R unabhängig, so folgt aus der Gleichung (1.) § 5, dass die Unterdeterminanten $(h-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\Theta(x)$ alle durch $\Phi(x)^{e-1}$ theilbar sind. Daher sind die Unterdeterminanten von $\Theta(\xi-u\varepsilon)$ alle durch $\Phi(\xi-u\varepsilon)^{e-1} = \Phi(x-u\varepsilon)^{e-1}$, also auch durch $(u-u_1)^{e-1}$, theilbar und nicht durch eine höhere Potenz von $u-u_1$, weil sonst $\Theta(\xi-u\varepsilon)$ durch eine höhere als die e^{te} Potenz von $u-u_1$ theilbar sein müsste. Mittelst derselben Sätze ergiebt sich aus den Gleichungen (9.), § 5 und (6.), dass der Rang der Matrix (χ) gleich ef ist, wie ich *Ch.* § 5 ausführlicher gezeigt habe. Daher ist auch der Rang der Matrix

$$(10.)\qquad (\xi) = (\tfrac{e}{h}\chi')(x) = (x)(\tfrac{e}{h}\chi')$$

gleich ef. Folglich verschwinden $h-ef$ Elementartheiler der charakteristischen Determinante von (ξ) für $u=0$, und weil das Product derselben nach (6.) gleich u^{h-ef} ist, so muss jeder von ihnen linear sein. Mithin enthält der grösste gemeinsame Divisor der Unterdeterminanten $(h-1)^{\text{ten}}$ Grades jener Determinante den Factor u genau in der $(h-ef-1)^{\text{ten}}$ Potenz, und demnach muss

$$(-1)^f G(u) = u\,\Phi(x-u\varepsilon)$$

sein.

§ 9.

Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich nun zum Beweise des Fundamentalsatzes der Theorie der Gruppendeterminanten:

Der Exponent der Potenz, worin die Gruppendeterminante einen Primfactor enthält, ist dem Grade des Factors gleich.

Den Fall $f=1$ habe ich bereits in § 2 erledigt. Wegen der Schwierigkeit des allgemeinen Beweises schicke ich noch die besonderen Fälle $f=2$ und 3 voraus.

Ist $f=2$, so ist

$$(1.)\qquad 2\Phi(x) = S_1^2 - S_2,$$

und der entsprechende Charakter χ genügt den Relationen $\chi(A,B,C)=0$ oder

$$(2.)\quad \chi(A)\chi(B)\chi(C)-\chi(A)\chi(BC)-\chi(B)\chi(AC)-\chi(C)\chi(AB)+\chi(ABC)+\chi(ACB) = 0.$$

In dieser Gleichung ersetze ich B durch BC^{-1} und summire dann nach C über die h Elemente von $\mathfrak{H}$ (oder man summire in (2.) über alle Elemente B, C, die der Bedingung $BC=B'$ genügen, wo B' ein festes Element ist). Mit Hülfe der Formeln (7.) § 5 und (3.) § 7 findet man

$$\frac{h}{e}\chi(A)\chi(B)-h\chi(A)\chi(B)-\frac{h}{e}\chi(AB)-\frac{h}{e}\chi(AB)+h\chi(AB)+\frac{h}{f}\chi(A)\chi(B) = 0,$$

also weil $f=2$ ist,

$$\left(\frac{h}{e}-\frac{h}{f}\right)\left(\chi(A)\chi(B)-2\chi(AB)\right) = 0.$$

Daher ist $e=f$, weil nicht für je zwei Elemente

$$\chi(A)\chi(B)-2\chi(AB) = 0$$

sein kann. Denn sonst erhielte man, indem man diese Gleichung mit $x_A x_B$ multiplicirt und nach A und B summirt, $S_1^2-2S_2=0$. Nach (1.) wäre also $4\Phi = S_1^2$, während Φ unzerlegbar ist.

Ist $f=3$, so ist

$$(3.)\qquad 6\Phi = S_1^3-3S_1S_2+2S_3,$$

und der entsprechende Charakter genügt den Relationen $\chi(A,B,C,D)=0$ ((20.) § 3). Ersetzt man darin C durch CD^{-1} und summirt dann nach D, so erhält man

$$\frac{h}{e}(\chi(A)\chi(B)\chi(C)-\chi(B)\chi(AC)-\chi(A)\chi(BC)-\chi(A)\chi(BC)-\chi(B)\chi(AC)$$
$$-\chi(C)\chi(AB)+\chi(ABC)+\chi(ACB)+\chi(ABC)+\chi(ABC)+\chi(ACB)+\chi(ACB))$$
$$+h(-\chi(A)\chi(B)\chi(C)+\chi(C)\chi(AB)+\chi(A)\chi(BC)+\chi(B)\chi(AC)-\chi(ABC)-\chi(ACB))$$
$$+\frac{h}{f}(\chi(A)\chi(B)\chi(C)+\chi(A)\chi(B)\chi(C)-\chi(B)\chi(AC)-\chi(A)\chi(BC)-\chi(C)\chi(AB)$$
$$-\chi(C)\chi(AB))=0,$$

also wenn man den Factor h durch $3\frac{h}{f}$ ersetzt,

$$(4.)\quad \left(\frac{h}{e}-\frac{h}{f}\right)(\chi(A)\chi(B)\chi(C)-2\chi(A)\chi(BC)-2\chi(B)\chi(AC)-\chi(C)\chi(AB)$$
$$+3\chi(ABC)+3\chi(ACB))=0.$$

Wäre nun der zweite Factor immer Null, so erhielte man, indem man mit $x_A x_B x_C$ multiplicirt und summirt, $S_1^3-5S_1S_2+6S_3=0$, und indem man mittelst dieser Gleichung S_3 aus (3.) eliminirt, $9\Phi=S_1(S_1^2-2S_2)$, während Φ unzerlegbar ist. Daher ist $e=f=3$.

Im allgemeinen Falle genügt der Charakter χ den Relationen

$$\chi(A,B,C,\cdots Q,R,S)=0,$$

wo $A,B,\cdots R,S$ irgend $f+1$ Elemente sind, oder kurz

$$\Sigma^{(f+1)}(\Pi-\chi)=0.$$

In jedem der $(f+1)!$ Glieder dieser Summe ersetze ich R durch RS^{-1} und summire dann noch S. Jedes Glied entspricht einer gewissen Permutation von $f+1$ Symbolen, die in cyklische Factoren zerlegt ist. In Bezug auf diese Permutation unterscheide ich drei Fälle:

1. R und S kommen in zwei verschiedenen Cyklen der Permutation vor, z. B.

$$(-\chi(ABCD\cdots FR))(-\chi(S))(-\chi(G\cdots K))\cdots.$$

Ersetzt man R durch RS^{-1} und summirt dann nach S, so erhält man nach (7.) § 5

$$-\frac{h}{e}(-\chi(ABCD\cdots FR))(-\chi(G\cdots K))\cdots.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich in derselben Weise aus dem Gliede

$$(-\chi(BCD\cdots FR))(-\chi(SA))(-\chi(G\cdots K))\cdots$$

und aus

$$(-\chi(CD\cdots FR))(-\chi(SAB))(-\chi(G\cdots K))\cdots$$

u. s. w. und schliesslich aus

$$(-\chi(R))(-\chi(SABCD\cdots F))(-\chi(G\cdots K))\cdots,$$

aber aus keinem anderen Gliede. Ist also r die Anzahl der Elemente $ABCD\cdots FR$, so erhält man auf diesem Wege

$$(5.) \qquad -\frac{h}{e}\Sigma^{(f)} r(\Pi-\chi).$$

Die $f!$ Glieder dieser Summe sind in analoger Weise wie die der Summe (19.) § 3 aus den $f!$ Permutationen der f Elemente $A, B, C, \cdots Q, R$ gebildet. Nur erhält in dieser Summe, worin das Element R bevorzugt ist, jedes Glied $(\Pi-\chi)$ noch einen Zahlenfactor r. Dieser ist gleich der Anzahl der Elemente des Cyklus, worin R vorkommt (vergl. (4.)).

2. R und S kommen beide in demselben Cyklus der Permutation vor, und zwar folgt S in dem Cyklus unmittelbar auf R (es kann also auch S das erste und R das letzte Element des Cyklus sein), z. B.

$$(-\chi(AB\cdots FRS))(-\chi(G\cdots K))\cdots.$$

Ersetzt man R durch RS^{-1} und summirt dann nach S, so erhält man

$$h(-\chi(AB\cdots FR))(-\chi(G\cdots K))\cdots,$$

und zwar jedes Glied nur einmal, also im Ganzen

$$(6.) \qquad h\Sigma^{(f)}(\Pi-\chi).$$

3. R und S kommen beide in demselben Cyklus vor, ohne dass S unmittelbar auf R folgt, z. B.

$$(-\chi(A\cdots RBCD\cdots FS))(-\chi(G\cdots K))((-\chi(L\cdots N))\cdots.$$

Ersetzt man R durch RS^{-1} und summirt dann nach S, so erhält man nach (3.) § 7

$$-\frac{h}{f}(-\chi(A\cdots R))(-\chi(BCD\cdots F))(-\chi(G\cdots K))(-\chi(L\cdots N))\cdots.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich in derselben Weise aus dem Gliede

$$(-\chi(A\cdots RCD\cdots FBS))(-\chi(G\cdots K))(-\chi(L\cdots N))\cdots,$$

das durch cyklische Vertauschung der zwischen R und S stehenden Elemente $BCD\cdots F$ aus dem obigen hervorgeht. Die Anzahl der cyklischen Vertauschungen, die man so ausführen kann, ist gleich der Anzahl der Elemente $BCD\cdots F$. Ferner ergiebt sich dasselbe Resultat aus dem Gliede

$$(-\chi(A\cdots RG\cdots KS))(-\chi(BCD\cdots F))(-\chi(L\cdots N))\cdots.$$

Auch hier kann man noch die zwischen R und S stehenden Elemente $G\cdots K$ cyklisch vertauschen, was auf so viele Arten möglich ist, wie die Anzahl der Elemente $G\cdots K$ beträgt.

Dasselbe Resultat ergiebt sich aus dem Gliede

$$(-\chi(A\cdots RL\cdots NS))(-\chi(BCD\cdots F))(-\chi(G\cdots K))\cdots$$

u. s. w., im Ganzen also auf so viele Arten, wie die Anzahl der Elemente $BCD \cdots FG \cdots KL \cdots N \cdots$ beträgt und nicht auf mehr Arten, also auf $f-r$ Arten, wenn, wie oben, die Anzahl der Elemente $A \cdots R$ mit r bezeichnet wird. Demnach erhält man

$$(7.) \qquad -\frac{h}{f}\Sigma^{(f)}(f-r)(\Pi-\chi).$$

Vereinigt man die drei Ausdrücke (5.), (6.) und (7.), so ergiebt sich die Gleichung

$$(8.) \qquad \left(\frac{h}{f}-\frac{h}{e}\right)\left(\Sigma^{(f)} r(\Pi-\chi)\right) = 0\,.$$

Mithin ist $e = f$, wenn man zeigen kann, dass nicht für je f Elemente $AB \cdots QR$

$$\Sigma^{(f)} r(\Pi-\chi) = 0$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit $x_A\, x_B \cdots x_Q\, x_R$ und summirt nach jedem der f Elemente $A, B, \cdots Q, R$, so erhält man eine Relation zwischen $S_1, S_2, \cdots S_f$. Diese ist nicht identisch (ohne Rücksicht auf die Bedeutung von $S_1, S_2, \cdots S_f$) erfüllt, da sie in Bezug auf S_f linear ist und der Coefficient von S_f eine nicht verschwindende ganze Zahl ist. Ich werde aber zeigen, dass $S_1, S_2, \cdots S_f$ f unabhängige Functionen der h Variabelen x_R sind, dass also zwischen ihnen keine Relation besteht, deren Coefficienten von den Variabelen x_R unabhängig sind. Daraus folgt dann, dass auch $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_f$ unabhängig sind, und ebenso $u_1, u_2, \cdots u_f$.

Bestände zwischen den f Functionen $S_1, S_2, \cdots S_f$ der h unabhängigen Variabelen x_R eine Gleichung, so würde sich, indem man sie nach x_R differentiirt, eine Relation der Form

$$\Psi_1 \frac{\partial S_1}{\partial x_R} + \Psi_2 \frac{\partial S_2}{\partial x_R} + \cdots + \Psi_f \frac{\partial S_f}{\partial x_R} = 0$$

ergeben, wo $\Psi_1, \Psi_2, \cdots \Psi_f$ ganze Functionen der h Variabelen sind, die von R unabhängig sind. Nun ist aber

$$S_n = \sum_{R_1, R_2, R_3, \cdots R_n} \chi(R_1 R_2 R_3 \cdots R_n)\, x_{R_1} x_{R_2} x_{R_3} \cdots x_{R_n}$$

und folglich

$$\frac{\partial S_n}{\partial x_R} = \sum_{R_2, R_3, \cdots R_n} \chi(R R_2 R_3 \cdots R_n)\, x_{R_2} x_{R_3} \cdots x_{R_n}$$

$$+ \sum_{R_1, R_3, \cdots R_n} \chi(R_1 R R_3 \cdots R_n)\, x_{R_1} x_{R_3} \cdots x_{R_n} + \cdots$$

$$+ \sum_{R_1, R_2, \cdots R_{n-1}} \chi(R_1 R_2 \cdots R_{n-1} R)\, x_{R_1} x_{R_2} \cdots x_{R_{n-1}},$$

also da $\chi(ABC \cdots F)$ bei cyklischer Vertauschung der Elemente ungeändert bleibt, (9.) $$\frac{\partial S_n}{\partial x_R} = n \sum_{R_1, R_2, \cdots R_{n-1}} \chi(RR_1R_2 \cdots R_{n-1})\, x_{R_1} x_{R_2} \cdots x_{R_{n-1}}$$

oder nach (6.) § 1 und (7.) § 8

(10.) $$\frac{\partial S_n}{\partial x_R} = n \sum_S \chi(RS) x_S^{(n-1)} = \frac{nh}{e} \xi_{R^{-1}}^{(n-1)},$$

wo $\xi_R^{(n)}$ aus den Grössen ξ_R in derselben Weise gebildet ist wie $x_R^{(n)}$ aus den Grössen x_R. Speciell ist

(11.) $$\frac{\partial S_n}{\partial x_E} = n\, S_{n-1}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die obige Relation ein, so erhält man, falls man noch R durch R^{-1} ersetzt,

$$\Psi_1 \frac{e}{h} \chi(R^{-1}) + 2\Psi_2 \xi_R + 3\Psi_3 \xi_R^{(2)} + \cdots + f\Psi_f \xi_R^{(f-1)} = 0.$$

Setzt man $R = PQ^{-1}$, so wird dies eine Gleichung zwischen Matrizen, die, mit (x) multiplicirt, lautet

$$(\xi)\Psi_1 + 2(\xi)^2\Psi_2 + 3(\xi)^3\Psi_3 + \cdots + f(\xi)^f\Psi_f = 0.$$

Ich habe aber in § 8 gezeigt, dass die Gleichung niedrigsten Grades, der die Matrix (ξ) genügt, vom Grade $f+1$ ist. Der zweite Factor des Ausdrucks (8.) kann also nicht für jedes System von f Elementen verschwinden, und mithin muss

(12.) $$e = f$$

sein.

§ 10.

Sind x_R und y_R zwei Systeme von je h Variabelen, so ist nach § 6 die Matrix $(x_{PQ^{-1}})$ mit der Matrix $(y_{Q^{-1}P})$ vertauschbar, und folglich ist die Determinante

(1.) $$|u x_{PQ^{-1}} + v y_{Q^{-1}P} + w \varepsilon_{PQ^{-1}}|$$

ein Product von h linearen Functionen der drei Variabelen u, v, w von der Form $ua_\alpha + vb_\alpha + w$. Hier sind $a_1, a_2, a_3 \cdots$ die h Wurzeln der Matrix $(x_{PQ^{-1}})$ und $b_1, b_2, b_3, \cdots$ die der Matrix $(y_{Q^{-1}P})$ oder, was nach § 6 dasselbe ist, der Matrix $(y_{PQ^{-1}})$. Es fragt sich nun, in welcher Weise die Wurzeln dieser beiden Matrizen einander zugeordnet werden müssen, damit $ua_\alpha + vb_\alpha + w$ ein Linearfactor der Determinante (1.) sei. Ich setze

$$\sum_R x_R \chi(RS^{-1}) = \frac{h}{e}\xi_S, \qquad \sum_R y_R \chi(RS^{-1}) = \frac{h}{e}\eta_S,$$

ferner

$$(x_{PQ^{-1}}) = (x), \qquad (\xi_{PQ^{-1}}) = (\xi), \qquad (y_{Q^{-1}P}) = (\bar{y}), \qquad (\eta_{Q^{-1}P}) = (\bar{\eta}),$$

wobei immer P die Zeilen und Q die Spalten der Matrix bezeichnet.

Dann ist

$$(\frac{e}{h}\chi')(x) = (x)(\frac{e}{h}\chi') = (\xi), \qquad (\frac{e}{h}\chi')(\bar{y}) = (\bar{y})(\frac{e}{h}\chi') = (\bar{\eta}).$$

Die k verschiedenen Charaktere χ unterscheide ich durch obere Indices $\chi^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 0, 1, \cdots k-1)$. Die dem Charakter $\chi^{(\varkappa)}$ entsprechenden Matrizen (ξ) und $(\bar{\eta})$ bezeichne ich mit $(\xi^{(\varkappa)})$ und $(\bar{\eta}^{(\varkappa)})$. Sind dann $\varkappa$ und λ verschieden, so folgt aus (9.) § 5

(2.) $$(\xi^{(\varkappa)})(\xi^{(\lambda)}) = 0, \quad (\bar{\eta}^{(\varkappa)})(\bar{\eta}^{(\lambda)}) = 0, \quad (\xi^{(\varkappa)})(\bar{\eta}^{(\lambda)}) = 0, \quad (\bar{\eta}^{(\varkappa)})(\xi^{(\lambda)}) = 0.$$

Nach Gleichung (5.) § 7 ist

$$\sum_{\varkappa}(\frac{e^{(\varkappa)}}{h}\chi') = (\varepsilon)$$

und mithin

$$\sum_{\varkappa}(\xi^{(\varkappa)}) = (x), \qquad \sum_{\varkappa}(\bar{\eta}^{(\varkappa)}) = (y).$$

Entwickelt man also das Product der k Matrizen

$$\Pi_{\varkappa}\left(u(\xi^{(\varkappa)}) + v(\bar{\eta}^{(\varkappa)}) + w(\varepsilon)\right)$$

nach Potenzen von w, so erhält man

$$w^k(\varepsilon) + w^{k-1}\big(u(x) + v(y)\big),$$

während die übrigen Glieder nach (2.) verschwinden. Zwischen den Determinanten dieser Matrizen ergiebt sich daher die Beziehung

(3.) $$\Pi_{\varkappa}\left| u\,\xi^{(\varkappa)}_{PQ^{-1}} + v\,\eta^{(\varkappa)}_{Q^{-1}P} + w\,\varepsilon_{PQ^{-1}} \right| = w^{h(k-1)} \left| u\,x_{PQ^{-1}} + v\,y_{Q^{-1}P} + w\,\varepsilon_{PQ^{-1}} \right|$$

(vergl. die analoge Entwicklung *V.* S. 610). Irgend einer der k Factoren der linken Seite sei

(4.) $$| u\,\xi_{PQ^{-1}} + v\,\eta_{Q^{-1}P} + w\,\varepsilon_{PQ^{-1}} |.$$

Wie die rechte Seite zeigt, ist diese Determinante gleich einer Potenz von w, multiplicirt mit einer Anzahl der linearen Factoren $u a_\alpha + v b_\alpha + w$ der Determinante (1.). Andererseits kann man die Determinante (4.) als einen speciellen Fall der Determinante (1.) betrachten: Die Wurzeln der Matrix (ξ) sind nach (5.) § 8 die f Wurzeln $u_1, u_2, \cdots u_f$ der Gleichung $\Phi(x - u\varepsilon) = 0$, jede e Mal gezählt, und ausserdem $(h-ef)$ Mal gezählt die Zahl 0. Ebenso sind die Wurzeln der Matrix $(\bar{\eta})$, die Zahl 0 und die Wurzeln $v_1, v_2, \cdots v_f$ der Gleichung $\Phi(y - v\varepsilon) = 0$. Daher ist die Determinante (4.) ein Product von linearen Factoren $au + bv + w$, wo a eine der $f+1$ Grössen $0, u_1, u_2, \cdots u_f$ und b eine der $f+1$ Grössen $0, v_1, v_2, \cdots v_f$ ist. Eine Combination, wie $a = u_1$, $b = 0$, kann aber, wie die rechte Seite der Gleichung (3.) zeigt, nicht vorkommen. Abgesehen von einer Potenz von w enthält daher die Determinante (4.)

nur noch lineare Factoren der Form $uu_\alpha + vv_\beta + w$, worin u_α eine der f Grössen $u_1, u_2 \cdots u_f$ und v_β eine der f Grössen $v_1, v_2, \cdots v_f$ ist. Nun ist

$$u(\xi) + v(\overline{\eta}) = (\tfrac{e}{h}\chi')(u(x) + v(\overline{y})),$$

und daher hat diese Matrix den Rang ef. Mithin enthält die Determinante den Factor w mindestens in der Potenz $h-ef$, aber auch in keiner höheren, weil dies nach (5.) § 8 nicht einmal für $v = 0$ der Fall ist. Die übrigen ef Linearfactoren sind demnach alle von der Form $uu_\alpha + vv_\beta + w$. Sei $uu_1 + vv_1 + w$ einer derselben. Betrachtet man die h Grössen y_R, also die f Grössen v_β als constant, so hat die Determinante (4.), als Function von w betrachtet, mit der irreducibelen Function $\Phi(ux_E + vv_1 + w, ux_A, ux_B, \cdots)$ den Linearfactor $uu_1 + vv_1 + w$ gemeinsam. Folglich hat sie alle Factoren $uu_\alpha + vv_1 + w$ $(\alpha = 1, 2, \cdots f)$ mit ihr gemeinsam. Ebenso erkennt man, dass die Determinante die f^2 linearen Functionen

$$uu_\alpha + vv_\beta + w \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots f)$$

sämmtlich enthält, und jeden gleich oft. Kommt jeder Factor m Mal vor, so ist $ef = mf^2$, also $e = fm$. Auf diese Weise kann man daher, ohne das Resultat des § 9 zu benutzen, nachweisen, dass e durch f theilbar ist. Nach diesem ist aber $e = f$, und mithin ist $m = 1$, also

$$(5.) \qquad |u\,\xi_{PQ^{-1}} + v\,\eta_{Q^{-1}P} + w\,\varepsilon_{PQ^{-1}}| = w^{h-ef} \prod_{\alpha,\beta}{}_1^f (uu_\alpha + vv_\beta + w).$$

Durch diese Betrachtung ist nun die Art bestimmt, wie man die Wurzeln der beiden Matrizen (x) und (y) einander zuordnen muss, um die linearen Factoren der Determinante (1.) zu erhalten. Sind Φ und Φ' zwei verschiedene Primfactoren von Θ, so ist jede Wurzel der Gleichung $\Phi(x - w\varepsilon) = 0$ mit jeder Wurzel der Gleichung $\Phi(y - w\varepsilon) = 0$ zu combiniren, aber mit keiner Wurzel der Gleichung $\Phi'(y - w\varepsilon) = 0$. Die Allgemeinheit der erhaltenen Formel wird nicht vermindert, wenn man $u = v = 1$ und $w = 0$ setzt. Ist

$$(6.) \qquad \Psi(x, y) = \prod_{\alpha,\beta}{}_1^f (u_\alpha + v_\beta)$$

die Resultante der beiden Functionen $\Phi(x - \varepsilon w)$ und $\Phi(y + \varepsilon w)$ der Variabelen w, so ist

$$(7.) \qquad |x_{PQ^{-1}} + y_{Q^{-1}P}| = \Pi\,\Psi(x, y).$$

Könnte man direct beweisen, dass diese Determinante, als Function der $2h$ unabhängigen Variabelen x_R, y_R betrachtet, keinen mehrfachen Factor besitzt, so wäre damit für die Gleichung $e = f$ ein neuer Beweis geliefert. Setzt man die h Grössen $y_R = 0$, so wird $\Psi(x, y) = \Phi(x)^f$.

Auf diesem Wege erlangt man eine tiefere Einsicht in den Grund der merkwürdigen Erscheinung, dass die Gruppendeterminante jeden Primfactor in einer Potenz enthält, deren Exponent dem Grade des Factors gleich ist.

Von besonderem Interesse ist der specielle Fall, wo $y_R = -x_R$ ist. Dann ist die Determinante

$$|x_{PQ^{-1}} - x_{Q^{-1}P} + w\varepsilon_{PQ^{-1}}| = w^s \Pi\Psi, \tag{8.}$$

wo

$$\Psi = \prod_{\alpha > \beta} \left(w - (u_\beta - u_\alpha)^2\right) \tag{9.}$$

und

$$s = \Sigma f \tag{10.}$$

ist. Der Gleichung $\Psi = 0$ genügen also die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der Gleichung $\Phi(x - w\varepsilon) = 0$. Ich will nun zeigen, dass die für $w = 0$ verschwindenden Elementartheiler jener Determinante alle linear sind, oder, was dasselbe ist, dass der Rang r der Matrix

$$(x_{PQ^{-1}} - x_{Q^{-1}P}) \tag{11.}$$

gleich

$$r = h - s \tag{12.}$$

ist. Nach Formel (8.) ist $r \geqq h - s$. Da die beiden Matrizen (x) und $(x)^n$ mit einander vertauschbar sind, so ist

$$x_A^{(n+1)} = \Sigma\, x_R x_S^{(n)} = \Sigma\, x_R^{(n)} x_S \qquad (RS = A)$$

oder

$$x_A^{(n+1)} = \sum_R x_{AR^{-1}} x_R^{(n)} = \sum_R x_R^{(n)} x_{R^{-1}A},$$

also

$$\sum_R (x_{AR^{-1}} - x_{R^{-1}A})\, x_R^{(n)} = 0.$$

Setzt man für A der Reihe nach alle h Elemente von $\mathfrak{H}$, so ist

$$\sum_R (x_{AR^{-1}} - x_{R^{-1}A})\, y_R = 0 \tag{13.}$$

ein System von h linearen Gleichungen zwischen den h Unbekannten y_R. Der Rang der von ihren Coefficienten gebildeten Matrix ist r. Mithin bildet das vollständige System ihrer Lösungen eine Matrix vom Range $h - r$, und der Rang irgend eines Systems ihrer Lösungen, z. B. des Systems

$$y_R = x_R^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist $\leqq h - r$. Enthält die charakteristische Determinante $|x_{PQ^{-1}} - u\varepsilon_{PQ^{-1}}|$ der Matrix (x) irgend einen Linearfactor $u - u_1$ in der e^{ten} Potenz, so enthält ihn nach § 8 der grösste gemeinsame Divisor ihrer Unterdeterminanten $(h-1)^{\text{ten}}$ Grades in der $(e-1)^{\text{ten}}$ Potenz. Folglich ist die

Gleichung niedrigsten Grades, der die Matrix (x) genügt, vom Grade $\Sigma f = s$, nämlich $G((x)) = 0$, wo

$$(-1)^s G(u) = \Pi\, \Phi(x - u\varepsilon)$$

ist. Daher sind die Matrizen $(x)^0, (x)^1, \cdots (x)^{s-1}$ linear unabhängig, also sind auch die s Lösungen

$$(14.) \qquad y_R = x_R^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots s-1)$$

unabhängig, und mithin ist $s \leqq h - r$. Folglich ist $r = h - s$, und die Grössen (14.) bilden ein vollständiges System unabhängiger Lösungen der h linearen Gleichungen (13.), unter denen r unabhängig sind.

§ 11.

Nach den Gleichungen (9.) § 8 ist

$$(1.) \qquad \Phi(x) = \Phi(\xi), \quad \Phi_n(x) = \Phi_n(\xi), \quad S_n(x) = S_n(\xi),$$

also

$$(2.) \qquad n!\ \Phi_n(x) = \sum_{R_1, R_2, \cdots R_n} \chi(R_1, R_2, \cdots R_n)\, \xi_{R_1} \xi_{R_2} \cdots \xi_{R_n}$$

und

$$(3.) \qquad S_n(x) = \sum_{R_1, R_2, \cdots R_n} \chi(R_1 R_2 \cdots R_n)\, \xi_{R_1} \xi_{R_2} \cdots \xi_{R_n}.$$

Eine andere Darstellung ergiebt sich aus den Formeln (10.) § 9, nämlich

$$(4.) \qquad \frac{e}{h} S_n(x) = \xi_E^{(n)} = \sum_{R_1, R_2, \cdots R_n} \xi_{R_1} \xi_{R_2} \cdots \xi_{R_n}. \qquad (R_1 R_2 \cdots R_n = E)$$

Demnach lassen sich die Functionen S_n und Φ_n und speciell Φ selbst durch die h Variabelen

$$(5.) \qquad \xi_S = \frac{e}{h} \sum_R \chi(RS^{-1})\, x_R$$

ausdrücken, unter denen nur ef unabhängig sind, weil nach § 8 der Rang der Matrix, die von den Coefficienten dieser h linearen Functionen der h Variabelen x_R gebildet wird, gleich ef ist. Führt man diese Umformung für jeden Primfactor von Θ aus, so wird die Gruppendeterminante durch

$$(6.) \qquad \Sigma\, ef = h$$

neue Variabele ausgedrückt.

Man transformire jede der k Primfunctionen $\Phi, \Phi', \cdots$ einzeln durch eine lineare Substitution in eine Function von möglichst wenig neuen Variabelen. Ist ihre Anzahl für $\Phi, \Phi', \cdots$ gleich $g, g', \cdots$, so ist $g \leqq ef$, $g' \leqq e'f', \cdots$. Es könnte dann sein, dass sich die Functionen $\Phi, \Phi', \cdots$ insgesammt durch noch weniger als $g + g' + \cdots$ neue Variabele darstellen liessen, lineare Verbindungen der h unabhängigen Variabelen x_R. Wäre dies der Fall, oder wäre $g < ef$, oder $g' < e'f', \cdots$

so liesse sich Θ durch eine lineare Substitution in eine Function von weniger als h Variabelen transformiren. Nun ist aber

$$\sum_R \frac{\partial l\Theta}{\partial x_R}\, x_{RA^{-1}} = \varepsilon_A h.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $x_{B^{-1}}$, so erhält man

$$\sum_R \frac{\partial^2 l\Theta}{\partial x_R\, \partial x_{B^{-1}}}\, x_{RA^{-1}} = -\frac{\partial l\Theta}{\partial x_{B^{-1}A}} = -\frac{h}{\Theta}\,\Theta_{B^{-1},A^{-1}}$$

und mithin

$$\left|\frac{\partial^2 l\Theta}{\partial x_P\, \partial x_{Q^{-1}}}\right| \left|x_{PQ^{-1}}\right| = \left(-\frac{h}{\Theta}\right)^h \left|\Theta_{P,Q}\right|,$$

also

$$\left|\frac{\partial^2 l\Theta}{\partial x_P\, \partial x_{Q^{-1}}}\right| = \frac{(-h)^h}{\Theta^2} \tag{7.}$$

Könnte man aber Θ durch eine lineare Substitution in eine Function von weniger als h Variabelen transformiren, so müsste diese Determinante verschwinden. Folglich lässt sich Φ durch ef, aber nicht durch weniger als ef Variabele ausdrücken, die lineare Verbindungen der h Variabelen x_R sind, und die ef Variabelen von Φ, die $e'f'$ von Φ', $\cdots$ sind alle von einander unabhängig.

In einer besonders einfachen Weise lässt sich Φ^e durch die Variabelen ξ_R darstellen. Dazu benutze ich den folgenden Determinantensatz (vergl. meine Arbeit *Über das* Pfaff'*sche Problem,* Crelle's Journal Bd. 82; § 4, I):

Ist r der Rang der Matrix

$$a_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta, = 1, 2, \cdots n)$$

so verhalten sich die Determinanten r^{ten} Grades, die sich aus den Elementen von r Spalten dieser Matrix bilden lassen, wie die entsprechenden Determinanten r^{ten} Grades, die sich aus den Elementen von irgend r anderen Spalten dieser Matrix bilden lassen.

Dabei heissen zwei Determinanten entsprechende, wenn zu ihrer Bildung dieselben Zeilen und zwar in derselben Reihenfolge benutzt sind. Derselbe Satz gilt, wenn man die Zeilen und die Spalten vertauscht. Er lässt sich so verallgemeinern:

Ist die Matrix $(c_{\alpha\beta})$ aus den beiden Matrizen $(a_{\alpha\beta})$ und $(b_{\alpha\beta})$ zusammengesetzt, und ist r der Rang der Matrix $(a_{\alpha\beta})$, so verhalten sich die Determinanten r^{ten} Grades, die sich aus den Elementen von r Spalten der Matrix $(a_{\alpha\beta})$ bilden lassen, wie die entsprechenden Determinanten r^{ten} Grades, die sich aus den Elementen von irgend r Spalten der Matrix $(c_{\alpha\beta})$ bilden lassen.

Der Rang der Matrix

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha 1} b_{1\beta} + a_{\alpha 2} b_{2\beta} + \cdots + a_{\alpha n} b_{n\beta}$$

ist dann höchstens gleich r. Eine Bedeutung hat aber dieser Satz nur, wenn der Rang von $(c_{\alpha\beta})$ gleich r ist. Dies muss der Fall sein, wenn die Determinante n^{ten} Grades $(b_{\alpha\beta})$ von Null verschieden ist.

Mit dem Zeichen

$$\left| a \begin{matrix} \alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_r \\ \beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_r \end{matrix} \right|$$

bezeichne ich die Determinante r^{ten} Grades, gebildet aus den Elementen der Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ und der Spalten $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r$ der Matrix $(a_{\alpha\beta})$, in der angegebenen Reihenfolge. Dann ist also das Verhältniss

$$\left| a \begin{matrix} \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_r \\ \alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_r \end{matrix} \right| : \left| c \begin{matrix} \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_r \\ \beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_r \end{matrix} \right|$$

von der Wahl der Indices $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_r$ unabhängig.

Ist wieder $(c_{\alpha\beta}) = (a_{\alpha\beta})(b_{\alpha\beta})$, und ist r der Rang der Matrix $(b_{\alpha\beta})$, so verhalten sich die Determinanten r^{ten} Grades, die sich aus den Elementen von r Zeilen der Matrix $b_{\alpha\beta}$ bilden lassen, wie die entsprechenden Determinanten r^{ten} Grades, die sich aus den Elementen von irgend r Zeilen der Matrix $(c_{\alpha\beta})$ bilden lassen.

Diesen Satz wende ich auf die Matrix

$$(8.) \qquad (\xi) = (\tfrac{e}{h}\chi')(x) = (x)(\tfrac{e}{h}\chi')$$

an. Der Rang der Matrix (χ') ist $g = ef$, ebenso der der Matrix (ξ). Daher gilt der obige Satz sowohl für die Zeilen, wie für die Spalten, und es ist

$$\left| \xi \begin{matrix} A_1 A_2 \cdots A_g \\ B_1 B_2 \cdots B_g \end{matrix} \right| = \left(\frac{e}{h}\right)^g \left| \chi' \begin{matrix} A_1 A_2 \cdots A_g \\ B_1 B_2 \cdots B_g \end{matrix} \right| \Psi,$$

wo Ψ von der Wahl der Elemente $A_1, A_2, \cdots A_g, B_1, B_2, \cdots B_g$ unabhängig ist. Vergleicht man in den Relationen

$$|\xi_{PQ^{-1}} + u\varepsilon_{PQ^{-1}}| = \Phi(x+u\varepsilon)^e u^{h-g}, \qquad \left|\frac{e}{h}\chi'(PQ^{-1}) + u\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = (u+1)^g u^{h-g}$$

die Coefficienten von u^{h-g}, so ergiebt sich: Die Summe aller Hauptunterdeterminanten r^{ten} Grades ist für die Matrix (ξ) gleich $\Phi(x)^e$ und für die Matrix $(\frac{e}{h}\chi')$ gleich 1. Folglich ist $\Psi = \Phi^e$, also

$$(9.) \qquad \left| \xi \begin{matrix} A_1 A_2 \cdots A_g \\ B_1 B_2 \cdots B_g \end{matrix} \right| = \left(\frac{e}{h}\right)^g \left| \chi \begin{matrix} B_1 B_2 \cdots B_g \\ A_1 A_2 \cdots A_g \end{matrix} \right| \Phi(x)^e.$$

Wählt man die $2g$ Elemente $A_1, B_1, \cdots A_g, B_g$ so, dass die hierin auftretende Determinante g^{ten} Grades der Matrix (χ) von Null verschieden ist, so ist die entsprechende Determinante der Matrix (ε) bis auf einen constanten Factor gleich Φ^e. Unter den von Null verschiedenen Determinanten r^{ten} Grades dieser beiden Matrizen giebt es auch Hauptunterdeterminanten (worin $B_1 = A_1, \cdots B_g = A_g$ ist), weil die Summe aller Hauptunterdeterminanten g^{ten} Grades nicht verschwindet.

In derselben Weise ergiebt sich die allgemeinere Formel

$$(10.)\qquad \left|\xi_{PQ^{-1}}+\eta_{Q^{-1}P}\right| = \left(\frac{e}{h}\right)^g \left|\chi(QP^{-1})\right| \Psi(x,y), \qquad \begin{pmatrix} P = A_1, A_2, \cdots A_g \\ Q = B_1, B_2, \cdots B_g \end{pmatrix}$$

wo $\Psi(x,y)$ dieselbe Bedeutung hat, wie in der Gleichung (6.) § 10.

§ 12.

Die Ermittlung der k Primfactoren, worin die Gruppendeterminante zerfällt, ist auf die Bestimmung der Constanten $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$ zurückgeführt, die von der Auflösung einer Gleichung k^{ten} Grades abhängt. Ich will nun die algebraische und arithmetische Natur dieser Grössen näher untersuchen. Zunächst bestimme ich den algebraischen Körper, dem diese Zahlen angehören.

Sei $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, g ihre Ordnung, sei $h = gn$ und H die zu $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppendeterminante. Seien $E, A, B, \cdots$ die g Elemente von $\mathfrak{G}$, und $L, M, \cdots$ die nicht in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{H}$. Setzt man dann in Θ die Variabelen $x_L, x_M, \cdots$ alle gleich Null, so wird, wie ich *Ch.* § 7, (10.) gezeigt habe,

$$(1.)\qquad \Theta = \mathrm{H}^n.$$

Daher sind die Coefficienten derjenigen Glieder von Θ, die nur von $x_E, x_A, x_B, \cdots$ abhängen, den Coefficienten der entsprechenden Glieder von H^n gleich.

Ist $\mathfrak{G}$ eine commutative Gruppe, so ist H ein Product von g linearen Factoren

$$\mathrm{H} = (\Sigma\, \psi_1(R) x_R)(\Sigma\, \psi_2(R) x_R) \cdots,$$

und die Charaktere $\psi_1(R), \psi_2(R), \cdots$ sind alle vom ersten Grade, also Einheitswurzeln. Speciell ist $\psi_1(E) = \psi_2(E) = \cdots = 1$. Ist demnach Φ ein Primfactor f^{ten} Grades von Θ, so wird diese Function, wenn man darin $x_L = x_M = \cdots = 0$ setzt, gleich dem Producte von f dieser linearen Factoren, etwa

$$(2.)\qquad \Phi = (\Sigma\, \psi_1(R) x_R)(\Sigma\, \psi_2(R) x_R) \cdots (\Sigma\, \psi_f(R) x_R).$$

Ersetzt man x_E durch $x_E - u$, so erkennt man, dass die f Wurzeln der Gleichung $\Phi(x - u\varepsilon) = 0$, falls man $x_L = x_M = \cdots = 0$ setzt, ganze lineare Functionen der Variabelen $x_E, x_A, x_B, \cdots$ werden, etwa

$$(3.)\qquad u_\lambda = \sum_\lambda \psi_\lambda(R)\, x_R, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots f)$$

deren Coefficienten Einheitswurzeln sind. Ist also A eins der Elemente von $\mathfrak{G}$, so ist der Coefficient von $x_E^{f-1} x_A$ in $\Phi(x)$ gleich

$$(4.)\qquad \chi(A) = \psi_1(A) + \psi_2(A) + \cdots + \psi_f(A),$$

und diese Gleichung gilt auch für $A = E$. Sind ferner A und B

zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, so ist, weil ψ_λ ein Charakter ersten Grades ist, $\psi_\lambda(AB) = \psi_\lambda(A)\psi_\lambda(B)$ und mithin

$$(5.)\qquad \chi(AB) = \psi_1(A)\psi_1(B) + \psi_2(A)\psi_2(B) + \cdots + \psi_f(A)\psi_f(B).$$

Daher hat die Matrix $(\chi(PQ^{-1}))$, die für die Gruppe $\mathfrak{H}$ den Rang ef hat, höchstens noch den Rang f, falls P und Q nur die Elemente von $\mathfrak{G}$ durchlaufen.

Ist A irgend ein Element von $\mathfrak{H}$, und m seine Ordnung, so bilden die Potenzen von A eine commutative Gruppe der Ordnung m. Wählt man diese für $\mathfrak{G}$, so werden die m Charaktere $\psi_1(A) = \rho_1$, $\psi_2(A) = \rho_2, \cdots$ alle m^{te} Wurzeln der Einheit. Mithin ist

$$(6.)\qquad \chi(A) = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_f, \qquad \chi(A^n) = \rho_1^n + \rho_2^n + \cdots + \rho_f^n$$

für jeden Werth von n. Für $n = m-1$ folgt daraus, dass $\chi(A)$ und $\chi(A^{-1})$ conjugirt complexe Grössen sind (*Ch.* § 3).

Ist A ein Element der m^{ten} Ordnung und χ ein Charakter f^{ten} Grades, so lässt sich $\chi(A)$ als eine Summe von f m^{ten} Wurzeln der Einheit darstellen.

Dieselben sind einzeln dadurch bestimmt, dass $\chi(A^n)$ gleich der Summe ihrer n^{ten} Potenzen ist. Setzt man in Φ alle Variabelen gleich Null ausser $x_E, x_A, x_{A^2}, \cdots x_{A^{m-1}}$, so wird nach (2.)

$$\Phi = (x_E + \rho_1 x_A + \rho_1^2 x_{A^2} + \cdots + \rho_1^{m-1} x_{A^{m-1}}) \cdots (x_E + \rho_f x_A + \rho_f^2 x_{A^2} + \cdots + \rho_f^{m-1} x_{A^{m-1}}).$$

Setzt man daher in Φ alle Variabelen gleich Null, ausser x_E und x_A, so wird

$$(7.)\qquad \Phi(x_E, x_A, 0, 0, \cdots) = (x_E + \rho_1 x_A)(x_E + \rho_2 x_A) \cdots (x_E + \rho_f x_A)$$

und mithin nach (9.) § 4

$$(8.)\qquad u^f + \vartheta_1(A) u^{f-1} + \vartheta_2(A) u^{f-2} + \cdots + \vartheta_f(A) = (u + \rho_1)(u + \rho_2) \cdots (u + \rho_f).$$

Speciell ist, da $\vartheta_f(A) = \vartheta(A)$ ist,

$$(9.)\qquad \vartheta(A) = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_f.$$

Wendet man die Formel (1.) auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ an, die von den Potenzen von A gebildet wird, so erhält man

$$\Theta = \Big(\prod_\rho (x_E + \rho x_A + \rho^2 x_{A^2} + \cdots + \rho^{m-1} x_{A^{m-1}})\Big)^{\frac{h}{m}},$$

wo ρ alle m^{ten} Wurzeln der Einheit durchläuft. Setzt man also in Θ alle Variabelen gleich Null, ausser x_E und x_A, so wird

$$(10.)\qquad \Theta(x_E, x_A, 0, 0, \cdots) = \big(x_E^m + (-x_A)^m\big)^{\frac{h}{m}}.$$

Folglich ist, wie ich in § 3 auf anderem Wege gezeigt habe, der Coefficient von x_A^h in Θ gleich

$$(11.)\qquad \prod \vartheta(A)^e = (-1)^{h - \frac{h}{m}}.$$

Sei B ein zweites Element von $\mathfrak{H}$, und seien $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_f$ die f dem Charakter $\chi(B)$ entsprechenden Einheitswurzeln, also

$$(12.)\quad \chi(B) = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_f, \qquad \chi(B^n) = \sigma_1^n + \sigma_2^n + \cdots + \sigma_f^n.$$

Sind nun A und B mit einander vertauschbar, so erzeugen sie eine Gruppe $\mathfrak{G}$. Daher kann man die Formel (5.) anwenden und erkennt: Die Einheitswurzeln der beiden Systeme lassen sich einander so zuordnen, dass

$$(13.)\quad \chi(AB) = \rho_1\sigma_1 + \cdots + \rho_f\sigma_f, \qquad \chi(A^rB^s) = \rho_1^r\sigma_1^s + \cdots + \rho_f^r\sigma_f^s$$

wird. Setzt man in der Primfunction Φ, die dem Charakter χ entspricht, alle Variabelen gleich Null, ausser x_E, x_A und x_B, so erhält man nach (2.)

$$(14.)\quad \Phi(x_E, x_A, x_B, 0, 0, \cdots) = (x_E + \rho_1 x_A + \sigma_1 x_B)\cdots(x_E + \rho_f x_A + \sigma_f x_B),$$

wodurch zugleich die Zuordnung der Einheitswurzeln bestimmt ist.

Um für die entwickelten Sätze ein Beispiel zu geben, betrachte ich ein invariantes Element B der Gruppe $\mathfrak{H}$, d. h. ein solches, das mit jedem Elemente R von $\mathfrak{H}$ vertauschbar ist. In der Formel (3.) § 7 ist dann $R^{-1}BR = B$, und mithin, falls A irgend ein anderes Element von $\mathfrak{H}$ ist,

$$\chi(A)\chi(B) = f\chi(AB).$$

Alle invarianten Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine commutative Gruppe $\mathfrak{G}$. Setzt man für jedes Element G derselben $\chi(G) = f\psi(G)$, so ist demnach für je zwei Elemente A und B von $\mathfrak{G}$ $\psi(A)\psi(B) = \psi(AB)$. Mithin ist $\psi(G)$ ein Charakter von G, also eine Einheitswurzel ρ. Ferner ist $\psi(G^n) = \psi(G)^n$, also $\chi(G) = f\rho$ und $\chi(G^n) = f\rho^n$. Für ein invariantes Element G von $\mathfrak{H}$ sind folglich die f in der Formel (6.) auftretenden Einheitswurzeln alle einander gleich.

Zu demselben Resultate führt die Bemerkung, dass ein invariantes Element A für sich allein eine Classe conjugirter Elemente bildet. Setzt man daher in Φ alle Variabelen gleich Null ausser x_E und x_A, so wird Φ nach Formel (7.) § 6 die f^{te} Potenz einer linearen Function von x_E und x_A, und folglich ist nach Formel (7.) $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_f$.

Nun sei wieder A ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}$, und sei m seine Ordnung. Ist ρ eine primitive m^{te} Wurzel der Einheit, so sind die Grössen $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_f$ in der Formel (6.) alle Potenzen von ρ, und daher ist $\chi(A)$ eine Zahl des Körpers $K(\rho)$, der von allen rationalen Functionen von ρ gebildet wird. Unter den mit A conjugirten Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}$ können sich auch Potenzen von A befinden, $A^r, A^s, A^t \cdots$. Ihre Exponenten sind zu m theilerfremd und bilden eine Gruppe, d. h. einer unter ihnen ist $\equiv rs \pmod{m}$, wenn r und s irgend zwei von ihnen sind. Da A und A^r conjugirt sind, so ist $\chi(A) = \chi(A^r)$, also

$\rho_1 + \cdots + \rho_f = \rho_1^r + \cdots + \rho_f^r$. Drückt man $\chi(A)$ durch ρ aus, so bleibt demnach diese Zahl ungeändert, falls man ρ durch ρ^r ersetzt. Diejenigen Zahlen des Körpers $K(\rho)$, die ungeändert bleiben, falls man ρ durch ρ^r oder ρ^s, oder $\rho^t, \cdots$ ersetzt, bilden einen Körper $\Lambda(\rho)$, einen Divisor von $\mathrm{K}(\rho)$. Die Zahl $\chi(A)$ gehört folglich diesem Körper $\Lambda(\rho)$ an.

Ist z. B. $\mathfrak{H}$ die symmetrische Gruppe des Grades n, also $h = n!$, so ist A mit jeder Potenz A^r conjugirt (ähnlich), deren Exponent r zu m theilerfremd ist. Daher sind die Charaktere der symmetrischen Gruppe sämmtlich ganze rationale Zahlen (vergl. die Beispiele $n = 4$ und 5, *Ch.* § 8).

In dem Körper $\Lambda(\rho)$ ist $\chi(A)$ als Summe von Einheitswurzeln eine *ganze* algebraische Zahl. Eine solche ist aber auch jeder Coefficient von Φ, also auch von Φ_n. Denn wenn in einem Producte $\Theta = \Phi\Psi$ von zwei ganzen Functionen von beliebig vielen Variabelen, deren Coefficienten algebraische Zahlen sind, alle Coefficienten ganze algebraische Zahlen sind, so ist auch das Product aus jedem Coefficienten von Φ und jedem von Ψ eine ganze algebraische Zahl (vergl. Dedekind, *Über einen arithmetischen Satz von Gauss.* Prager Math. Ges. 1892). Sind $A, B, C, \cdots$ verschiedene Elemente von $\mathfrak{H}$ und ist $r + s + t + \cdots = n$, so hat $x_A^r x_B^s x_C^t \cdots$ in Φ_n den Coefficienten

$$\frac{1}{r!s!t!\cdots}\chi(A, \cdots A, B, \cdots B, C, \cdots C, \cdots). \tag{15.}$$

Folglich ist dieser Ausdruck eine ganze algebraische Zahl. Wendet man denselben Satz auf die Factoren des Productes (9.) § 6 an, so erkennt man, dass auch

$$\frac{h_\alpha \chi_\alpha}{f} \tag{16.}$$

eine ganze algebraische Zahl ist. Folglich ist auch nach (6.) § 7

$$\sum \frac{h_\alpha \chi_\alpha}{f} \chi_{\alpha'} = \frac{h}{e}$$

eine ganze Zahl. Daher ist die Zahl $e = f$ ein Divisor der Ordnung h.

Ausgegeben am 10. December.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.